د. عبد العظيم انيس

مقدمة في

ت خ الرياضيات





د. عبد العظيم أنيس

مقدمة
فى
علم الرياضيات



دار المستقبل العربى

تقديم

يستمد هذا الكتاب مادته الاساسية من سلسلة المحاضرات التى كلفت منذ سنوات بإلقائها عن «تاريخ الرياضيات» على طلبة الدبلوم المهنى بكلية التربية جامعة عين شمس، وهم جميعا من خريجى أقسام الرياضيات بكليات التربية أو كلية البنات ويعملون بمهنة التدريس بالتعليم العام صباحا، ويحضرون محاضرات هذا الدبلوم فى المساء.

وهى تتناول بإيجاز هذا التاريخ فى العصور والحضارات المختلفة بدءا من الحضارة البابلية والفرعونية حتى القرن العشرين، مرورا بالحضارة اليونانية والحضارة العربية الاسلامية ثم أوروبا فى عصر النهضة وصولا إلى المرحلة الحديثة، وقد اعتمدت فى تناول هذا التاريخ أحيانا على بحث طبيعة المرحلة، وبالتركيز على الحديث عن بعض الشخصيات التى عبرت فى إنجازاتها عن المرحلة، أحياناً أخرى، مثل نيوتن فى عصر النهضة فى أوروبا، وجاوس فى أواخر القرن الثامن عشر حتى منتصف القرن التاسع عشر، ومثل بوانكريه فى القرن العشرين. على أنه من الطبيعى فى مثل هذا الكتاب المدرسى ألا يحيط بكل جوانب هذا التاريخ الواسع.

وقد اعتمدت فى إعداد هذه المحاضرات على عدد من المراجع الاساسية الحديثة فى مقدمتها كتاب «الخبرة الرياضية» للاستاذين الامريكيين فيليب دافيز، وروبن هيرش، وكتاب «وقائع فى رياضيات إسلام العصور الوسطى» للاستاذ الكندى برجرن، كما اعتمدت على بعض المراجع الغربية القديمة مثل كتاب «رجال الرياضيات» بجزئيه للاستاذ بل، وكتاب «الرياضيون العظام» للاستاذ تيرنبول.

كما استفدت كثيرا من كتاب الدكتور رشدى راشد الاستاذ بجامعة باريس، والذى صدر منذ سنوات بالفرنسية وصدرت طبعته العربية فى بيروت حديثا تحت عنوان «تاريخ الرياضيات العربية، بين الجبر والحساب».

كما استفدت أيضا من مقالات ظهرت فى العديد من المجالات العلمية البريطانية حول بعض قضايا تاريخ الرياضيات، ومن شبكة «الانترنت» للحصول على عدد من التقارير الهامة الصادرة عن مراكز البحوث الجامعية المنشغلة بقضايا تاريخ الرياضيات.

وأملى أن يكون الكتاب نافعا لطلاب الجامعة وأن أكون قد قدمت جهدا مفيدا ينفع الباحثين فى قضايا التراث العلمى.

مارس ١٩٩٧ د. **عبد العظيم أنيس**

(١)

(مقدمـــة)

إذا تأملنا طويلا فى البحث عن تعريف محكم للرياضيات فلن نجد حتى اليوم حلا شافيا لهذه المسألة ففى الماضى كانت الرياضيات تعرف بأنها علم دراسة المقادير (الكميات) المختلفة وعلاقاتها ببعضها البعض . إن هذا التعريف أو شئ مشابه له هو ما إعتمده علماء الرياضيات فى الحضارة العربية الإسلامية . منذ القرن التاسع عشر الميلادى والعاشر والحادى عشر مرورا بالخوارزمى والخيام وإبن الهيثم ... إلخ حتى الكاشى فى القرن الخامس عشر الميلادى . فى ذلك الزمان كان الإهتمام الأساسى بخواص هندسة إقليدس وحل معادلات الدرجة الأولى والثانية جبريا وبيانيا ، ثم حل معادلات الدرجة الثالثة بيانيا (الخيام بإستخدام تقاطع القطاعات المخروطية) ثم حل مشاكل حساب المثلثات لعلاقتها بالفلك ، وإيجاد قيم الجذور التربيعية والتكعيبية والجذر الرابع والخامس للأعداد ... إلخ . وحتى عصر النهضة فى أوربا الذى ورث إنجازات الحضارة العربية الإسلامية بدا هذا التعريف قبولا.

ثم جاء إكتشاف موضوع الزمر Groups فى القرن التاسع عشر (وهى الدراسة المجردة للتماثل) ثم إكتشاف فرع الرياضيات

المعروف بإسم Topology، وهى فروع لا كمية فأصبح التعريف السابق غير ملائم .

وخلال القرن العشرين ظهر تعريف أوسع للرياضيات أساسه أن الرياضيات مهتمة بدراسة الأنماط Patterns والأنظمة Orders . ولفترة طويلة بدا هذا التعريف أوسع وأكثر ملائمة، وقادرا على الإحاطة بفروع الرياضيات المختلفة المجردة خصوصا ولكن فى العشرين سنة الأخيرة ظهر فرع رياضى جديد يدعى " عدم الإنتظام " Chaos ، وهو ينشغل بالسلوك شبه العشوائى لبعض الظواهر وتفسيره رياضيا . ولهذا الفرع الرياضى الجديد تطبيقات هامة فى علم الأرصاد وعلوم الحياة وفروع الطب (أبحاث القلب خصوصا) واساسه ان العالم الذى نعيش فيه غير خطى Non-linear ، وأن محاولات دراسة الظواهر الطبيعية بمعادلات خطية سواء أكانت تفاضلية أو خلافه ليست إلا تقريبا فجا ، ولا تبرير له إلا سهولة الحصول على حلول فى صورة مغلقة Closed form ، بينما يصعب الحصول على مثل هذه الحلول فى حالة المعادلات غير الخطية ولا حل لها إلا بالحساب . وحيث أن الحاسب الآلى لم يكن موجودا آنذاك فقد فضل الرياضيون الإبتعاد عن المعادلات غير الخطية .

أما اليوم حيث تتوفر الحواسب الآلية ذات السرعات الفائقة فقد كان من الطبيعى العودة إلى البحث فى حلول المعادلات غير الخطية بإستخدام الحواسب الآلية . ومن خلالها إكتشف أن العديد

من المتغيرات الطبيعية تتصرف في لحظات معينة بشكل شاذ ، كالقشة التي قصمت ظهر البعير كما يقول المثل العربي القديم ، أو كما يقول المعاصرون في الغرب "تأثير الفراشة" The Butterfly Effect ، وبمقتضاه يمكن لفراشة ترف بجناحيها في الصين أن تؤدى إلى حدوث إعصار على سواحل أمريكا الغربية .

هناك إذن مشكل لم يحل تماما حول تعريف علم الرياضيات، اللهم إذا قبلنا ما قاله برتراند رسل ساخرا عندما عرف الرياضيات بأنها ما يصنعه الرياضيون .

Mathematics is what mathematicians do !

ويمكن أن نقول ونحن مطمئنون أن الرياضيات تتطور باستمرار في إتجاهات مختلفة وفق إحتياجات التطبيقات المختلفة المحتمله . ومن المرجح أن كل تطور علمي هام في الرياضيات سوف يحتاج إلى إطار نظرى جديد . وإذا لم تقدم الرياضيات القائمة اللغة الصحيحة فلا بد من إبتكار هذه اللغة ، وهي بدورها لابد أن تكون ذات صلات كافية بما هو قائم فعلا .

كثيرا ما تقدم الرياضيات كعلم نشأ في برج عاجي لا صلة له بالحياة العملية وبالنشاط الإنتاجي للإنسان ، على أن هذه النظرة للرياضيات زائفة ولا يدعمها تاريخ الرياضيات ومن المؤكد أن دراسة تاريخ العلوم والحضارة يوضح أن إزدهار الحضارات إرتبط به إزدهار العلوم الرياضية وعندما ندرس الحضارة الفرعونية أو البابلية ، وننظر إلى

أحوال المعابد سوف نجد أنه إستحال على الكهنة الإعتماد على ذاكرتهم فى تسجيل أعداد الداخلين من الناس أو أعداد الماشية الموهوبه إلى المعبد . ومن هنا نشأت الحاجة إلى التسجيل ، مما أدى إلى تعود الإنسان على فكرة العد . ومن هنا أيضا نشأت إرهاصات الكتابة . وفى البدء كانت علامات على عصى ، ثم إشارات على ألواح الطين ، وشيئا فشيئا أصبح لكل عدد رمزا خاصا وتطور الحال إلى ظهور الكتابة ورموز الإعداد .

وهكذا أيضا نشأت الكسور من خلال حاجة الإنسان إلى القياس (الأطوال والأوزان) ونشأت الهندسة من خلال حاجة الإنسان إلى مسح الأرض لأغراض الزراعة ومن خلال التطلع إلى النجوم والكواكب فى السماء ، وتطور الحساب من خلال إحتياجات التجارة والبناء حتى وصل الإنسان إلى إستخدام المعداد فى العمليات الحسابية . وأمكن للهنود أن يكتشفوا فكرة الصفر وإن لم ينتشر إستخدامه إلا على يد العرب فى العصر العباسى الأول ويعتبر هذا الإكتشاف نقطة تحول خطيرة فى تاريخ علم الحساب ، كما قال لابلاس لنابليون ، إذ به أمكن التعبير عن أى عدد بعشرة ارقام فقط وأصبح من الممكن إجراء أى عملية حسابية على الورق ودون حاجة إلى المعداد .

وبإبتكار الصفر وظهور رمزية بسيطة للأعداد والمقادير (س،ص،أ،ب.. إلخ) أمكن حل مشكلات تؤول في حلها إلى معادلة ، وهكذا تمهد الطريق لظهور علم الجبر

ولقد شهد العصر الحديث تقدما مذهلا للرياضيات في أوربا وأمريكا بالدرجة الأولى ، خصوصا خلال المائة سنة الأخيرة . فإكتشافات المائة سنة الأخيرة تفوق في أهميتها ما تحقق خلال آلاف السنين التي سبقتها ، والفضل في ذلك يعود إلى الحضارة الصناعية الحديثة بل حتى الحروب أدت إلى نشوء فروع من الرياضيات كان من الصعب ظهورها لولا هذه الحروب ، ومن أمثلة ذلك نظرية الألعاب Theory of games ، وبحوث العمليات ... إلخ .

وقد تتسع المسافة الزمنية بين إكتشاف رياضي وبين إستخدامه في التطبيقات ، لكن التاريخ يوضح انه حتى الأبحاث الرياضية التي بدت مجردة وبلا فائدة عند ظهورها وجدت فرصة تطبيقها بعد ذلك بسنين طويلة: فالقطع الناقص مثلا عندما إكتشفه الرياضيون في الحضارة اليونانية القديمة بدأ بلا نفع حتى أن أحد تلاميذ إقليدس في مدرسة الإسكندرية سأله عندما كان يدرس القطع الناقص: وما فائدة كل هذا ؟ فالتفت إقليدس إلى الخادم الذي يقف بجواره وقال غاضبا : ياغلام إعطه درهما . لكن القطع الناقص إكتسب أهمية فريدة بعد ذلك أكثر من ألف عام على يد نيوتن

وآخرين عندما قدموا تفسيرا مقنعا لحركة الأجسام السماوية فى مسار قطع ناقص .

ومن الأمثلة التاريخية أيضا الجذر التربيعى للعدد -١ ، ونرمز له بالرمز ت ، وهو يرجع فى أصله إلى بحوث معادلات الدرجة الثانية. وإلا أن ت إكتسب إحتراما رياضيا على يد جاوس على الرغم من إعترافه بأن " الميتافيزيقا الحقيقية للعدد ت تبدو مراوغة " لكن هكذا تم تعريف الإعداد المركبة التى تطورت إلى نظرية الدوال المركبة ، والتى بدت فى فترة من الفترات أنها بلا فائدة ثم تأكد نفعها من دورها الأساسى فى ميكانيكا الكم .

ولقد نشأ علم الإحتمال على يد فرمات وباسكال فى القرن السابع عشر من خلال المشاكل التى طرحتها مراهنات الفرسان على ألعاب واوراق الكوتشينة ، لكن التطبيقات الأهم فى علوم الإتصالات وجودة الإنتاج والتأمين على الحياة ... إلخ . لم تبدأ إلا بعد ذلك بقرن ونصف . ونفس الشئ يمكن أن يقال عن موضوع الكسريات Fractals الذى نشأ على يد الألمانى هاوس دورف Housdroff والفرنسى جوليا فى أوائل القرن العشرين . ولزمن طويل بدأ البحث مجردا فى هذا الموضوع وبلا تطبيق . لكن حديثا جدا امكن إستخدام هذه النتائج فى بحوث الجغرافيا وعلوم الحياة بنجاح .

من أين إذن نشأت هذه النظرة الزائفة إلى الرياضيات ؟

يمكن القول أن هناك ظروفا خاصه وطابعا خاصا للرياضيات ساعد على ترويج هذه النظرة . وفي مقدمتها

(أ) *التجريد* كصفة أساسية في العلم الرياضي ، ونعني بالتجريد هنا اننا عندما نبحث عن المجهول في معادلة الدرجة الثانية لا يهمنا أن نعرف إن كان هذا المجهول هو إنسان أو عمر إنسان أو فاكهة أو حيوانا أو جمادا .

وهذا التجريد في المعالجة يغرى بقبول تلك النظرة التى تتوهم ان الرياضيات لم تنشأ من خلال النشاط الحضارى للإنسان .

(ب) وجود مسافة زمنية في العادة بين الإكتشاف الرياضي وبين تطبيقات في الحياة . ولقد أشرنا إلى مثال القطع الناقص ، وإلى مثال الكسريات ، ويمكن أن نعطى امثله عديدة أخرى . وهذا الفاصل الزمنى بين العديد من الإكتشافات الرياضية وبين تطبيقاتها ساعد دون شك على مابدا أحيانا من ان بعض الإكتشافات الرياضية لا فائدة منها ، وبالتالى لا علاقة لها بالحياة .

(ج) وقد تعود هذه النظرية الزائفة إلى حقيقة أن الحضارات القديمة (الفرعونية والبابلية) وهى الأصل فى نشأة

الرياضيات لم تمنحنا حتى اليوم وثائق كافية لشرح الفكر الرياضى النظرى القائم آنذاك وصلته بواقع الحياة .

(د) وأخيرا فإن ميراث البشرية الأساسى فى الرياضيات هو ميراث الحضارة اليونانية وصل إلى الغرب مترجما عن الحضارة العربية الإسلامية.

والمجتمع اليونانى القديم مجتمع ذو طابع خاص يعتبر نموذجا لما يسمى بالمجتمع العبودى به سادة وعبيد .

والعبيد فى هذا المجتمع يشتغلون بالحرف والإنتاج والزراعة ، بينما السادة يشتغلون بالتفكير والتأمل ، وإلى هؤلاء السادة يعود فضل التراث اليونانى فى الرياضيات ، ونذكر هنا على وجه التحديد مدرسة فيثاغورس التى كانت مدرسة رياضية نصف صوفية تاملية ، وحتى عندما أنشأ افلاطون الأكاديمية التى كان يتولى التدريس فيها حرص على أن يكتب على بابها " لا يدخلها إلا المشتغلون بالهندسة" ، ولقد تولى بعد ذلك إقليدس التدريس فى مدرسة الإسكندرية وفيها أنشأ كتابه المشهور " الأصول" The elements والذى ظل يدرس كما هو تقريبا فى المدارس حتى القرن العشرين ويعتبر ارشميدس ليس واحدا ن أعظم رياضى الحضارة اليونانية فحسب ، إلا أنه يعتبر واحدا من ثلاثة رياضيين يجلسون وحدهم على القمة فى

تاريخ البشرية وهم : أرشميدس ، نيوتن ، جاوسل . ولقد كان أرشميدس من السادة يعمل فى بلاط ، الملك ، إليه تنسب القصة المشهورة عندما كلفه الملك أن يبحث مسألة الكثافة النوعية للذهب والفضة ، وقيل أنه إكتشف الحل وهو فى الحمام فخرج عاريا وهو يصيح : وجدتها وجدتها .

ولقد تميزت أعمال هؤلاء السادة وكتاباتهم بإحتقار العمل اليدوى والإعلاء من شأن التأمل حتى ان أفلاطون كان يقول عن رواد الألعاب الأوليمبية بأنهم ثلاثة أنواع . فهناك اللاعبون والباعة والنظارة ، وهؤلاء الأخيرون فى رأيه أرقى الثلاثة لأنهم يتأملون !

√ <u>لماذا نهتم بتدريس تاريخ الرياضيات ؟</u>

(أ) الإهتمام بموضوع تاريخ الرياضيات هو إهتمام بنمو الفكر الإنسانى ونزعته إلى الدقة وإكتشاف قواعد موضوعية يستند إليها الإنسان فى إثبات صحة ما يقوم به .

(ب) لأن دراسة تاريخ الرياضيات تعطى الدارس فرصة تفهم الأسباب وراء كثير من الإجراءات وطرق العمل التى نقوم بها عند إجراء عملية رياضية . وقد يوفر هذا وقتا طويلا بتجنب محاولات سبق لمن سبقونا محاولتها ولم تنجح. أى

أن دراسة تاريخ الرياضيات قد تكون عاملا هاما فى رفع كفاءة البحث الرياضى .

(ج) وبالنسبة للمعلم تمده الدراسة التاريخية للرياضيات بثروة من المعلومات والقصص الطريفة والطرق المختصرة التى تفيده عند التدريس وتجعل مادته جذابة للتلاميذ .

(د) اهمية تكوين الحس التاريخى عند الرياضى ، فبالإضافة إلى التعريف بجوانب مجهولة عن الرياضيات يمكن من خلال الدراسة التاريخية إكتشاف إستخدامات مختلفة للرياضيات كانت مستعملة قديما وإن تكن مجهولة اليوم .

(و) ثم أخيرا ينبغى أن ندرس تاريخ الرياضيات حتى نعرف - كعرب - أمجادنا العلممية القديمة أى أمجاد الحضارة العربية الإسلامية وإنجازاتها فى الرياضيات من القرن التاسع حتى القرن الخامس عشر الميلادى على وجه الخصوص ، فى بغداد والقاهرة ودمشق والأندلس .

وفى الماضى كانت هناك النظرة القديمة للمستشرقين الأوربيين ، وقد دامت طوال القرن التاسع عشر ومعظم العشرين ، وهى النظرة المركزية الأوربية والتى إدعت أن العرب - بإستثناءات قليلة - كانوا ناقلين للعلم اليونانى فحسب ، ولم يجددوا فيه شيئا ولم يضيفوا إليه شيئا ، بإستثناء إبن الهيثم وكتابه فى البصريات (المناظير) .

ولكن على ضوء الإكتشافات الحديثه لوثائق عديدة تغيرت هذه النظرة عند العديد من الأكاديميين الأوربيين والأمريكيين ، وبدأوا في الإعتراف بالإنجازات الإبداعية للحضارة العربية الإسلامية . فهناك نصير الدين الطوسي (القرن الثالث عشر) اول من درس مسلمة إقليدس الخامسة (مسلمة التوازي) بهدف إشتقاقها من المسلمات الأربع الأولى وهذه الدراسة أدت بزخاري في القرن السابع عشر إلى بدء عملية الهندسة الأقليدية (وقد ثبت أن زخاري كان على معرفة بكتابات الطوسي) وهناك ترجمة جون واليس للبحوث العربية الرياضية وإستخدامه لها في محاضرة في جامعة إكسفورد (القرن ١٧) وهناك جابر بن أفلح (الأندلس) وإنتقاده لآراء بطلميوس في الفلك ، وقد ثبت أن كوبرنيكس وكبلر كانا على علم بكتابات إبن أفلح الذى كان متأثرا بفكرة دوران الأرض حول الشمس وهناك إنجازات إبن الهيثم في البصريات وهي إكتشافات يعترف الآن في أوربا بأنها كانت ذات أثر كبير على فكرة المنظور وتطور فن الرسم الأوربي وهناك الخيام وإبتكاراته في حلول معادلات الدرجة الثالثه بيانيا بإستخدام تقاطع قطاعات مخروطية ... إلخ .

ودراسة كل هذه الإنجازات تشعرنا أننا تفوقنا على العالم في فترة من الفترات وأننا قادرون بالجهد المتصل على أن نكون مبتكرين في العالم المعاصر ولا نكتفي بنقل إنجازات الحضارة الغربية .

(٢)

(إطلالـة عامــة)

<u>بعض قضايا نظرية الإعداد :</u> تعتبر نظرية الإعداد أبسط فروع الرياضيات من زاوية أنها تتعلق اساسا بالخواص الحسابية للأعـداد الصحيحـة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ... إلخ وعلـى ذلـك فهــى أصعــب فــروع الرياضيات فى براهينها المعقدة ، وبعض هذه المشاكل مـازالت حتى اليوم بدون حل .

ومن بين الموضوعات المتقدمة فى نظرية الأعداد سـوف نختـار ثـلاث قضايا لها أهمية خاصه

(أ) نظرية التجزيئات Theory of partitions

(ب) نظرية فرمات الأخيرة Fermat's last theorem

(ج) نظرية جاوس عن الأعداد الأولية .

وتتعلق نظرية التجزيئات (التقاسيم) بعدد الطرق التى يمكــن بهـا تجزيئ العدد الصحيح إلى أعداد صحيحة أصغر . مثلا العدد ٣ إذا أخذنا التقسيم الصفرى null partition يمكن تقسبمة إلى ٢ أو ١ + ١ والعدد ٣ يمكن تقسيمه إلى ٣ ، ٢ + ١ ، ١+١+١ أى ثلاثة تقسيمات ، والعــــدد ٤ يمكــــن تجزئتــــه إلى ٤ ، ٣ + ١ ، ٢ + ٢ ، ٢+١ +١ ، ١ + ١ + ١ + ١ أى خمسة أجزاء .

إن عدد طرق تقسيم عدد صحيح إلى أعداد أبسط ليس أمرا بسيطا ، (حاول مثلا بحث عدد أقسام العدد ١٠ وتحقق من أنها ٤٢ تجزئ) ، ولقد بدأ الإهتمام بهذا الموضوع منذ القرن السابع عشر ن والسؤال الهام هو هل هناك طريقة منتظمة للحصول على إجابات لأى عدد ؟

ولقد كانت للإجابة على هذا السؤال محل إهتمام كبير فى أوائل القرن العشرين خصوصا على يد الرياضى الهندى راما نوجان والإنجليزى هاردى ، ووصلا إلى نتائج نذكر بعضها هنا . نفرض ان ت (ن) هو عد د تجزيئات العدد الصحيح ن ، مثلا ت (٤) = ٥ .

لقد أمكن إثبات أن

$$\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ت}(\text{ن})\,\text{س}^{\text{ن}} = \frac{1}{(1-\text{س})(1-\text{س}^{2})(1-\text{س}^{3})}$$

كذلك أثبت رامانوجان من بين ما اثبت ان

$$\text{ت}(4) + \text{ت}(9)\,\text{س} + \text{ت}(14)\,\text{س}^{2} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{5\left\{(1-\text{س}^{5})(1-\text{س}^{10})(1-\text{س}^{15})\cdots\right\}^{5}}{\left\{(1-\text{س})(1-\text{س}^{2})(1-\text{س}^{3})\cdots\right\}^{6}}$$

والغريب أن بعض هذه النتائج التى أنتشرت أوائل القرن العشرين قد

وجدت مؤخرا تطبيقات هامة لها على يد الفيزيائى باكستر Baxter فى علم الميكانيكا الإحصائية .

والآن ننتقل إلى نظرية فرمات الأخيرة لقد سميت بهذا الإسم لأنه وجد على هامش نسخة من كتاب ديوفانتيس فى الجبر كتابه لفرمات قبل موته مباشرة يقول فيها إنه عثر على برهان لهذه النظرية ولكن نظرا لضيق الهامش لا يستطيع كتابة البرهان ولهذا سميت هذه النظرية " نظرية فرمات الأخيرة " ومنذ زمن فرمات يحاول الرياضيون دون جدوى البحث عن برهان لهذه النظرية ، وإن كان أحد الرياضيين الإنجليز من أساتذة جامعة برنستون قد أعلن العام الماضى أنه عثر على حل لهذه النظرية يقع فى الف صفحة .

والنظرية تتعلق بالسؤال التالى : هل هناك حل صحيح (أى أعداد صحيحة) للمعادلة.

$$س^{ن} + ص^{ن} = ع^{ن} \qquad \text{ن عدد صحيح}$$

فى حالة ن = ٢ نعرف أن هناك حل وفق نظرية فيثاغورس ، بل هناك عدد لا نهائى من الحلول الصحيحة لقيم س ، ص ، ع فى حالة ن = ٢ . ويمكن ان نبدأ بإختيار س عدد فردى فتربيعه ثم طرح واحد من هذا المربع وقسمة الناتج على ٢ نحصل على ص . وبإضافة ١ إلى ص نحصل على ع . مثلا إذا أخذنا س = ٥ بالتربيع نحصل على

٢٥ وبطرح واحد نحصل على ٢٤ وبالقسمة على ٢ نحصل على ١٢ .
وهذا هو ص وبإضافة ١ إلى ١٢ نحصل على ١٣ وهذا هو ع، أى أن

$$٥^٢ + ١٢^٢ = ١٣^٢$$

بوجه عام فإن المتطابقة فى حالة س = ٢م + ١ (فردى) هى

$$(٢م + ١)^٢ + [٢م(م+١)]^٢ = [٢م(م+١)+١]^٢$$

أما إذا كانت س عددا زوجيا ٨ مثلا فنقسم اولا على ٢ نحصل على ٤ ،
ثم نربع لنحصل على ١٦ ونطرح فقط واحد نحصل على ١٥ وهذا هو
ص ، وبإضافة ٢ إلى قيمة ص نحصل على ع وهو ١٧ أى أن

$$٨^٢ + ١٥^٢ = ١٧^٢$$

وبشكل عام فإن المتطابقة هى

$$(٢م)^٢ + (م^٢ - ١)^٢ = (م^٢ + ١)^٢$$

والسؤال الذى طرحته نظرية فرمات هو : إذا كانت ن > ٢ مثلا ٣ ، ٤،
٥ .... فهل هناك قيم صحيحة لـ س ، ص ، ع تحقق المعادلة .

$$س^ن + ص^ن = ع^ن \quad ن > ٢ \qquad (١)$$

إن نص نظرية فرمات الأخيرة يقول أنه لا يوجد حل للمعادلة (١) فى حالة ن >٢ خذ مثلا حالة ن = ٣ . فهل يمكن تقسيم مكعب كـامل . إلى مجموع مكعبين كاملين ؟

لم يعثر أحد على حالة واحدة من هذا النـوع ولكـن هل يوجد برهان ؟

لقد إنكب عشرات من الرياضيين منذ القرن السـابع عشر حتى العام المـاضى على محاولة الوصـول إلى برهـان عـام لنظريـة فرمات الأخيرة ولم ينجحـوا ، لقد أمكن برهـان النظريـة فـى حالـة ن = ٣ ، ٤ ، ٥ ، ... إلخ وأما البرهان العام فلم يعثر أحد عليـه حتـى أعلن فى العام الماضى عن برهان فى جامعة برنستون يقع فى ألف صفحة .

(٢) والآن نعود إلى الموضوع الثالث لهذا القسم ، الأعداد الأولية :

لقد جذب هذا الموضوع إهتماما فائقا من الريـاضيين ، لأنه يرتبط ببعض أشهر مسـائل التحليل الريـاضى . ومع ذلك فلا زالـت بعض جوانبه التى تبدو بسيطة دون برهان .

والأعداد الأولية هى التى لا يمكـن تحليلها لأبسط منهـا ، وهى كلها فردية بإستثناء العدد ٢ وإليك قائمة ببعض الأعداد الأولية :

٢	٣	٥	٧	١١	١٣	١٧	١٩	٢٣	٢٩
٣١	٣٧	٤١	٤٣	٤٧	٥٣	٥٩	٦١	٦٧	٧١
٧٣	٧٩	٨٣	٨٩	٩٧	١٠١	١٠٣	١٠٧	١٠٩	١١٣

وهذه القائمة بلا نهاية ، أى أن هناك عددا لا نهائيا من الأعداد الأولية . لقد برهن إقليدس ذلك وإليك البرهان :

نفرض ان هناك نهاية ك للأعداد الأولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ك.

والآن إعتبر العدد الصحيح ن = ٢ × ٣ × ٥ × ٧ × ... ك + ١

واضح أن العدد ن أكبر من ك . وإذا قسمنا ن على ٢ نحصل على ٣ × ٥ × ٧ .. ك والباقى ١ بالمثل إذا قسمنا ن على ٣ نحصل على ٢ × ٥ × ٧ ... له والباقى ١ وهكذا ... إلخ .

والآن العدد ن إما أن يكون أوليا أو لا يكون . فإذا كان أوليا فهو أكبر من ك وهذا يناقض الغرض . وإذا كان غير أولى فيمكن تحليله إلى أعداد أولية . ولكن لايمكن أن يكون أحد عوامله العدد ٢ أو ٣ ، ٥ ... أوك كما راينا لوجود باق

وعلى هذا فهناك عدد أولى أكبر من ك

الخاصة الثانية التى تلفت النظر فى الأعداد الأولية هى عدم وجود نسق ملحوظ فى هذه الأعداد . فالأعداد الأولية الأقل من ١٠ هى ٤

والأعداد الأولية الأقل من ١٠٠ هى ٢٥ والأعداد الأولية الأقل من الف هى ١٦٨ .

وقد اوضحت حسابات الحاسب الالى مثلا أن هناك تسعة أعداد أولية بين العدد ١٠٫٠٠٠٫٠٠٠ وبين الأعداد المائة الأقل منه مباشرة ، بينما هناك عددان أوليان فقط بين العشرة مليون والأعداد المائة الأكبر منه مباشرة .

أما ما هو مبرهن وغير برهن (وإن كان محل حد س) عن الأعداد الأولية فيمكن ان يملأ كتابا . مثلا إن أكبر عدد أولى معروف حتى اليوم هو $٢^{٢١٧٠١}$ - ١

من المبرهن أيضا ان أى عدد أولى على صورة ٤م + ١ (م عدد صحيح) هو مجموع مربعين صحيحين

١٣ = ٩ +٤ ، ٣٧ = ٣٦+١ ، ٦٢٩ = ٥٢٩ + ١٠٠ وهكذا)

معروف أيضا ومبرهن انه بين كل عدد صحيح ن ، ٢ن هناك عدد أولى ن > ١ ولكن هل هناك عدد أولى بين $ن^{٢}$ ، $(ن + ١)^{٢}$ لجميع ن > .

ليس هناك حتى اليوم برهان على ذلك .

هل كل عدد زوجى هو مجوع عددين اوليين ؟ هذا ما يعرف بإسم دعوى جولدباخ Goldbach conjecture (٨ = ٥ + ٣ ، ١٢ = ٧ + ٥ وهكذا ..). حتى اليوم لا يوجد برهان على ذلك هل هناك عدد لا نهائى من الأزواج الأولية prime pairs مثل

(٣ ، ٥) ، (١١ ، ١٣) ، (١٧ ، ١٩) ، (٢٩ ، ٣١) ...

حيث الفارق بين عنصرى الزوج هو ٢
لا أحد حتى اليوم قد برهن على ذلك على الرغم ن أن معظم الرياضيين مقتنعون بأن الإجابة بنعم

على أن بعض الإنتظام يتضح فى موضوع الأعداد الأولية إذا نظرنا إليها كمجتمع نبدأ أولا بعمل جدول كبير من الأعداد الأولية ، وقد أصبح هذا سهلا بفضل الحاسب الآلى . ولنفرض أن ع (ن) هى عدد الأعداد الأولية الأقل من أو تساوى ن مثلا إذا كان ن = ١٠ فإن ع (ن) = ٤ ، وإذا كانت ن = ١٠٠ فإن ع (ن) = ٢٥ وهكذا . والآن لنتأمل الجدول التالى الذى هو نتيجة الحساب على الحاسب الآلى .

ن	ع (ن)	$\frac{ن}{ع(ن)}$	الفروق الأولى
١٠	٤	٢ر٥	
			١ر٥
$١٠^{٢}$	٢٥	٤	
			٢
$١٠^{٣}$	١٦٨	٦	
			٢ر١
$١٠^{٤}$	١٢٢٩	٨ر١	
			٢ر٣
$١٠^{٥}$	٩٥٩٢	١٠ر٣	
			٢ر٣
$١٠^{٦}$	٧٨٤٩٨	١٢ر٧	
			٢ر٣
$١٠^{٧}$	٦٦٤٥٧٩	١٥	
			٢ر٤
$١٠^{٨}$	٥٧٦١٤٥٥	١٧ر٤	
			٢ر٣
$١٠^{٩}$	٥٠٨٤٧٥٣٤	١٩ر٧	
			٢ر٣
$١٠^{١٠}$	٤٥٥٠٥٢٥١٢	٢٢	

وواضح من الجدول أنه كلما زادت قوة العشرة إلى القيمة إلى التى تليها فإن النسبة $\frac{ن}{ع(ن)}$ تزيد بمقدار ٣ر٢ تقريبا وإذا إنتبهنا إلى أن هـلو ١٠ هى ٣ر٢ فإن من الممكن أن نصل إلى النتيجة التالية

$$\frac{ن}{ع(ن)} \sim \text{هـلو ن} \qquad \text{كلما زادت ن}$$

إن إكتشاف هذه النظرية يعود إلى جاوس وكان عمره ١٥ سنة ولم يستطع بالطبع تقديم برهان عليها ، وقد قام بذلك بعد أكثر من مائة عام الرياضى الفرنسى هادامار (عام ١٨٩٦)

والفكرة الفذة التي جعلت جاوس يحدس هذه النتيجة تتضح من التالى :

الدالة $\frac{ن}{ع(ن)}$ لها الخاصية التالية (سوف نرمز لها بالرمز د)

د (١٠ ن) = د(ن) + ٣ر٢ ولكن هذه هى خاصية الدالة اللوغاريتمية

هـلو ١٠ ن = هـلو ن + هـلو ١٠

ومن هنا جاء إقتراح

$$\frac{ن}{ع(ن)} \sim \text{هـلو ن}$$

إن هذه النتيجة التى وصل إليها جاوس فى هذا السن الصغير ودون حاسب آلى إنما هى دليل على عبقرية جاوس

(٣)

(تابع إطلالة عامة)

الحاسب الآلى كمساعد فى البحث الرياضى

قبل إكتشاف الحاسب الآلى كان عند بعض الرياضيين الصبر للقيام بحسابات مطولة ، مثل أويلر وجاكوبى ، وجاوس ، ورامانوجان (رياضى هندى فى القرن العشرين) . وهذه الحسابات المطولة هى الأساس الذى أقاموا عليهم دعاويهم Conjectures الرياضية وقد ثبت أن معظمها - وليس كلها - صحيح وامكن برهانها . وبالطبع نستطيع ان نتصور أنه لو كانت لدى هؤلاء الرياضيين العظام حواسب آلية كالتى نملكها اليوم كم النتائج النظرية التى كانوا سوف يصلون إليها.

ومن الناحية التاريخية فنحن نعلم ان جاكوبى ذهب إلى ما نشستر لمقابلة بباج Babbage لمعرفة مدى تقدم عمله فى بناء الماكينة التحليلية Analytical Engine وهى اول محاولة لعمل حاسب آلى . كما نعلم ان رامانوجان Ramanjan قد أسس عددا من دعاويه النظرية على نتائج حسابات ماكماهون .

وفى العشرين سنة الأخيرة إستخدم الحاسب الآلى فى عمل مساهمات هامة فى الإكتشافات النظرية الرياضية ، بما فى ذلك المساهمات التالية :

أ - برهان نظرية الألوان الأربعة .

ب- إثبات خطا دعـوى أويلر عن تعميم نظرية فرمات الأخيرة .

ج- تأكيد ان الـ ٢٥٠,٠٠٠ القيـم الصفرية من دالة ريمان زيتا Reman zeta function .

(وتعرف $\Im$ (ع) = ١ + $\frac{1}{2^{ع}}$ + $\frac{1}{3^{ع}}$ + $\frac{1}{4^{ع}}$ + ... ∞

حيث ع مركب)

تقع فعلا على الخط الحر ج ع = $\frac{1}{2}$ + ت ص

د - إيجاد قيمة ط لأكثر من مائة مليون رقم عشرى

أ. نظرية الألوان الأربعة

ظهرت نظرية الألوان الأربعة خلال القرن التاسع عشر (١٨٥٢) عندما ذهب طالب (فردريك جوثرى) فى جامعة لندن إلى أستاذه (دى مورجان) ليقول له إنه قد لاحظ ان أربع ألوان تكفى لتأوين محافظات (مقاطعات) أى قطر بحيث لا يكون لمحافظتين بينهما حدود مشتركة لون واحد وقد لاحظ أن هذا صحيح مهما كان عدد المحافظات وأوضاعها فهل يمكن إثبات هذا نظريا ؟

لم يكن لدى الأستاذ دى مورجان إجابة على هذا السؤال ، لكنه نشر مقالا عن هذا الموضوع عام ١٨٦٠ وطرحه امام الرياضيين فى أوربا وأمريكا .

إن أول محاولة جبرية لبرهان هذا النظرية جاءت على يد الإنجليزى كمب Kemp عام ١٨٧٩ أى بعد طرح المسألة علنا بتسعة عشر عاما . والغريب ان كمب كان محاميا بالمهنة وإن كان قد سبق له دراسة الرياضيات فى جامعة كمبردج . وقد نشر كمب برهانه فى " المجلة الأمريكية للرياضيات " واعتبر الموضوع منتهيا .

لكن المفاجأة المذهلة وقعت عام ١٨٩١ عندما قام استاذ بجامعة ديرهام (فى إنجلترا) بنشر بحث يبين فيه أن برهان كمب يحتوى على خطأ وأن المشكلة ما تزال دون حل . ورغم الصدمة فإن الشائع آنذاك فى أوساط الرياضيين الأوربيين أن الخطأ فى برهان كمب ليس من النوع الذى يصعب تداركه ، ولكن البرهان فى حاجة إلى بعض التعديل ليكون مقبولا .

لكن السنين مضت دون أن يستطع أحد تصحيح البرهان . ومنذ عام ١٨٩١ حتى عام ١٩٧٦ بذلت محاولات شتى دون جدوى . والحقيقة أنه لا يكاد يوجد عالم رياضى مرموق فى تلك الفترة إلا وقد حاول أن يحرق أصابه فى البحث عن برهان .

إلى أن أعلن الرياضيان آيل وهاكن الأستاذان بجامعة إلينوى فى الولايات المتحدة عن برهان جديد يشتمل على ١٢٠٠ ساعة عمل على الحاسب الآلى ، ويقع فى مائة صفحة كتلخيص ، ومائة صفحة من التفاصيل وسبعمائة صفحة من الهوامش .

ب . خطأ تعميم أويلر

تعرضنا من قبل لنظرية فرمات الأخيرة التى تقول إنه ليست هناك حلول صحيحة للمعادلة

$$س^{ن} + ص^{ن} = ع^{ن} \qquad ن > ٢ \qquad (١)$$

ولقد سميت هذه النظرية بهذا الإسم لأن فرمات (رياضي فرنسى فى القرن السابع عشر) كتب على هوامش نسخته من كتاب ديوفاتيس Arithmatica قبل وفاته بأيام أنه عثر على برهان لهذه النظرية لكنه لضيق الهوامش لا يستطيع كتابته .

وبالطبع حاول اويلر إثبات نظرية فرمات الأخيرة لكنه فشل فإكتفى بدلا من ذلك تعميم نظرية فرمات على النحو التالى :

<u>نظرية :</u>

المعادلة $س_{١}^{ن} + س_{٢}^{ن} + \cdots س_{ن-١}^{ن} = س_{ن}^{ن}$ (٢) $ن > ٢$

ليس لها حلول صحيحة للمتغيرات $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $\cdots$ $س_{ن}$

نلاحظ بالطبع أنه إذا كانت ن = ٣ فإن المعادلة تصبح

$س_{١}^{٣} + س_{٢}^{٣} = س_{٣}^{٣}$ وهذه معادلة فرمات فى حالة ن = ٣

وبالتالى فإن نظرية أويلر صحيحة فى حالة ن = ٣

ولمدة مـائتى عام إعتقد الرياضيون أن تعميم أويلر صحيح ، وإن لم يستطع أحد برهانه . لكـن حديثـا جـدا وفـى عـام ١٩٦٦ ، وبفضـل الحاسب الآلى إكتشف لاندر وباركن أن

$$٢٥^٥ + ٨٤^٥ + ١١٠^٥ + ١٣٣^٥ = ١٤٤^٥$$

وهذه حالة ن = ٥ فـى نظريـة أويـلر أى أن هنـاك حلـول صحيحـة للمعادلة (٢) فى حالة ن = ٥ ، وهذا يثبت خطأ نظرية أويلر .

وحديثا جدا امكن لـ Elkies أن يثبـت خطـأ نظرية أويلر فـى حالة ن = ٤ وهكـذا وبفضـل الحاسـب الآلى امكـن إثبـات أن تعميـم اويـلر لنظرية فرمات غير صحيح .

ج . أصفار دالة ريمان زيتا

عرفنا دالة ريمان زيتا من قبل . ومنـذ زمـن ريمـان هنـاك فـرض عـرف بإسـم " فـرض ريمـان" Riemann Hypothesis ، وهـو يتعلـق بجـذور هـذه الدالـة ، أى بالقيم المركبة ع = س + ت ص التى تجعل هذه الدالة تساوى صفرا .

ويقول فرض ريمان إن جذور هذه الدالة هى على الصورة

$$ع = \frac{١}{٢} + ت ص$$

أي جمع الجذور تقع على الخط الرأسى الموازى لمحو الصادات ويبعد عنه بمقدار $\frac{١}{٢}$ ويعتبر " فرض ريمان" هذا أهم مشكلة رياضة غير محلوله حتى اليوم .

لقد برهن الرياضى الإنجليزى هاردى Hardy فى الثلاثينيات على أن هناك عددا لا نهائيا عن الجذور تقع على المستقيم س = $\frac{١}{٢}$ ، لكننا مازلنا حتى اليوم لا نعلم إن كانت كل الجذور تقع على هذا المستقيم .

ولقد أمكن بفضل الحاسب الآلى التحقق بالفعل من أن السبعين مليون الجذور الأولى لهذه الدالة تقع فعلا على الخط الرأسى س = $\frac{١}{٢}$

د . قيمة ط

خلال العشرين سنة الأخيرة جرى حساب قيمة ط بإستخدا الحاسب الآلى لأكثر من مائة مليون رقم عشرى . وتلك هى الخطوة الأخيرة فى جهود إستمرت ٢٥٠٠ سنة لحساب قيمة ط بدقة ، لكن هذه الجهود قفزت قفزات هائلة منذ إكتشاف الحاسب الآلى (الكمبيوتر) .

ومن الطبيعى أن نتسائل : لماذا كل هذا الإهتمام بقيمة طـ ؟ خصوصا متى علمنا أن قيمة طـ لتسعة وثلاثين رقم عشرى كافية لحساب محيط الأرض بخطأ أقل من نصف قطر ذرة الهيدروجين .

لقد كان أرشميدس اول من وضع طريقة منهجية لحساب قيمة طـ عن طريق المثلثات المنتظمة الداخلة والخارجة للدائرة وبالتالى حساب قيمة مساحة الدائرة بأنها تقع بين مساحة المثلثات الداخلة ومساحة المثلثات الخارجة ، وأوصله هذا إلى أن

$$٣\frac{١}{٧} > \text{ط} > ٣\frac{١٠}{٧١}$$

تلك كانت المحاولة المنهجية الأولى ، وآخر المحاولات المنهجية باستخدام الورقة والقلم جاءت على يد وليم شانكس William Shanks الذى حسب طـ لـ ٧٠٧ رقم عشرى ونشر نتيجتة عام ١٨٧٣ . وفى عام ١٨٨٢ أثبت لندمان Lindemann لأول مرة أن طـ عدد غير نسبى irrational وبالتالى فليست هناك نهاية للرقم العشرى لقيمة طـ

ولقد وضع هذا الإكتشاف نهاية لمسالة " تربيع الدائرة " Squaring the circle التى كانت أحد أسباب جهود البحث عن قيمة طـ تاريخا (مسألة تربيع الدائرة هى بإختصار على النحو التالى : المطلوب رسم مربع مساحته تساوى مساحة دائرة معلومة)

إن هذه النتيجة (طـ عدد غير نسبى) لم تشجع أحداً بعد شانكس عل حساب طـ بدقة أكبر . وهكذا نام موضوع طـ لمدة سبعين سنة . لكنه عاد إلى دائرة الإهتمام من جديد ف القرن العشرين حيث أمكن حساب طـ لألفي رقم عشرى عام ١٩٤٩ دون حاسب آلي .

وتمت القفزة من ٢٠٠٠ رقم عشرى عام ١٩٤٩ إلى أكثر من ١٠٠ مليون رقم عشرى عام ١٩٨٧ بفضل توفر حواسب قوية جدا وسريعة جدا . ولكن الأهم من ذلك أن تحقيق هذه الدقة القوية إحتاجت إلى جهد قوى فى تبسيط خوارزميات الدوال الجبرية ، ثم حديثا جدا إتجه البحث فى موضوع قيمة طـ من إستخدام صيغ الجمع التقليدية Summation formulae إلى إستخدام فكرة الحلقات التكرارية Iteration loops التى تلائم الحاسب الآلي .

ومن مزايا إستمرار البحث فى موضوع هذا أنه حفز إحياء البحث فى مسائل التحليل الكلاسيكى والبحث فى موضوعات أخرى لتبسيط الخوارزميات الحسابية .

وأخيرا فإن برامج حساب طـ أصبحت ذات دور فى إختبار قدرة الحاسب ومدى الثقة به والآن إليك إشارة عن طرق الجمع التقليدية لحساب طـ قبل إكتشاف الحاسب الآلي .

يبدأ البحث فى هذا الموضوع من متسلسلة جريجورى وهى

$$\frac{ط}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} \cdots$$

، وتســــتنتج هـــــذه المتسلسلة من معرفة أن

$$طا^{-١} س = \int_{٠}^{س} \frac{د س}{١ + س^{٢}} = س - \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} \cdots\cdots \infty$$

ويوضح س = ١ نحصل علـى متسلسلة جريجـورى وهـى تقاربية لكـن تقاربها بطئ جدا ولذا فهى بلا فائدة فى حساب ط

ثم إكتشفت صيغ أويلر

$$\frac{ط^{٢}}{٦} = \sum_{س=١}^{\infty} \frac{١}{س^{٢}}$$

$$\frac{ط^{٤}}{٩٠} = \sum_{س=١}^{\infty} \frac{١}{س^{٤}}$$

وقد جرى إسـتخدام صيغ أويـلر لحساب طـ لأكبر عدد من الأرقـام العشرية ، فقام ، رزفورد عام ١٨٥٣ بحساب طـ لـ ٤٤٠ رقم عشرى وفـى نفس السنة قـام شـانكس بحساب طـ لـ ٦٠٧ رقم عشرى ثم قضـى العشرين السنه التالية فى تحسين هذه النتيجة بحساب طـ إلى ٧٠٧ رقم عشـرى . وظـل هـذا هو الرقم القياسى لمدة سبعين سنة إلى أن أوضح فيرجسـون عـام ١٩٤٥ أن نتيجة شانكس عام ١٨٥٣ (حساب طـ لـ ٦٠٧ رقم عشرى) صحيحة لـ ٥٢٧ رقم عشرى فقط ، وبالتالى فإن جهد شانكس لمدة عشرين سنة ضاع هباء .

ويعتبر جهد فيرجسون هو نهاية ماقبل عصر الكمبيوتر ، إذ إستطاع باستخدام آلة حاسبة يدوية حساب قيمة ط إلى ٨٠٨ رقم عشرى .

هـوامـش :

(١) أشرنا فى الصفحات السابقة إلى الطريقة التكرارية الملائمة لحساب الكمبيوتر . ولتوضيح هذا نذكر أن من الطرق القياسية لحل المعادلة د (ع) = ٠ هو إعادة كتابتها على الصورة

$$ع = ف\,(ع) \qquad (١)$$

(وهذا يمكن عمله بطرق لا نهائية) ثم تحويلها إلى عملية تكرارية iterative process بوضع $ع_{ن}$ محل ع فى الطرف الأيسر ، $ع_{ن+١}$ محل ع فى الطرف الأيمن من (١) ، وتصبح

$$ع_{ن+١} = ف\,(ع_{ن}) \qquad (٢)$$

ثم نبدأ بنقطة إختيارية $ع_{.}$ ونستخدم (٢) لحساب $ع_{١}$ إذ أن

$$ع_{١} = ف\,(ع_{.})$$

ثم من $ع_{١}$ نحسب $ع_{.}$ وهكذا بأمل أن تؤول $ع_{ن}$ إلى مقدار محدود عندما تؤول ن إلى ∞ .

مثلا إذا أردنا ان نحل المعادلة $ع^{٢} = ٢$

نلجا إلى إستخدام العملية التكرارية $ع_{ن+١} = \frac{١}{٢} ع_{ن} + \frac{١}{ع_{ن}} \qquad (٣)$

إذا كانت $ع_ن \to$ مقدار ع عندما تؤول ن إلى ∞ فإن

$$ع = \frac{١}{٢} ع + \frac{١}{ع}$$

أى $\frac{١}{٢} ع = \frac{١}{ع}$

أى $ع^٢ = ٢$ وهى المعادلة الأصلية

والآن نأخذ $ع_١ = ١$ مثلما فى (٣) نجد أن $ع_٢ = ١٫٥$

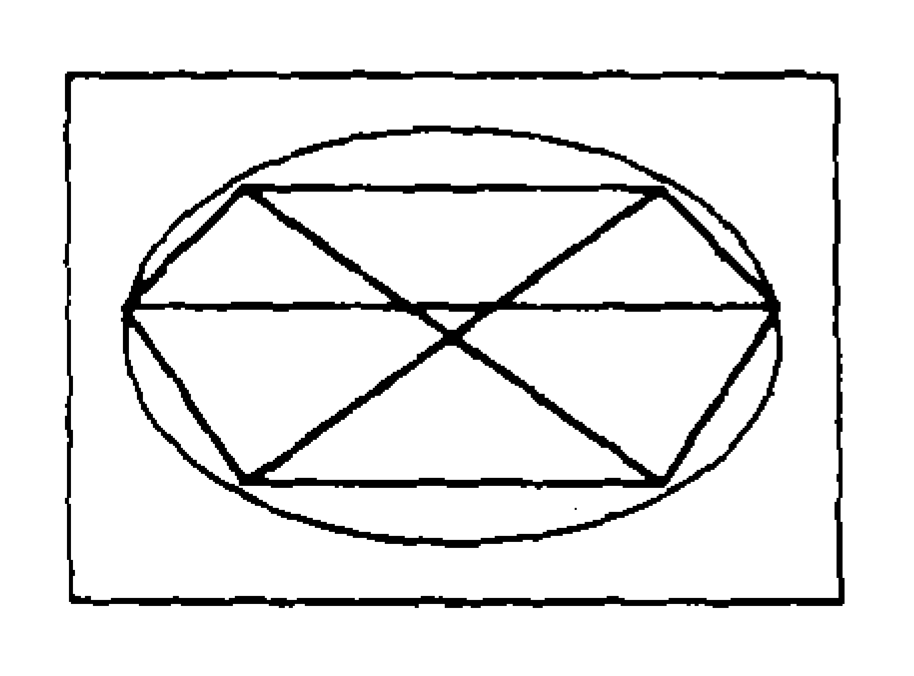
وبالتالى $ع_٣ = \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} + \frac{٢}{٣}$

$$= \frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٣} = \frac{١٧}{١٢} = ١\frac{٥}{١٢} = ١٫٤١٦٦٦$$

$$ع_٤ = ٠٫٧٠٨٣٣ + \frac{١}{١٫٤١٦٦٦} = ١٫٤١٤٢١$$

وهذه القيمة صحيحة للتعبير عن $\sqrt{٢}$ لخمسة أرقام عشرية .

(٢) أشرنا إلى طريقة أرشميدس فى حساب قيمة ط وذلك عن طريقة فكرة أن مساحة الدائرة تقع بين مساحة مجموع المثلثات المنتظمة داخل الدائرة ومساحة مجموع المثلثات المنتظمة الخارجة .



وهذه الفكرة هى الأساس فى حساب المساحة كتكامل فيما بعد ذلك بقرون ، وهى أساس تعريف ريمان للتكامل

ولذلك يمكن القول إن لأرشميدس فضل وضع البذور الأولى لعلم التكامل .

(٤)

(رياضة الحضارتين الفرعونية والبابلية)

ربما كان أكبر دليل على مهارات البابليين الحسابية يتمثل في الجداول التي كتبوها على ألواح الطين لمساعدتهم في العمليات الحسابية .

لقد كان للبابليين نظام عددى متقدم ، وهو نظام موضعى أساسه العدد ٦٠ وليس العدد ١٠ كما نفعل اليوم ، أى ان النظام هو النظام الستونى وليس النظام العشرى . وسوف نلاحظ ان عوامل الأساس ١٠ هى ٢ ، ٥ بينما عوامل الأساس ٦٠ هى عشرة أعداد (هى ٢،٣،٤،٥،٦،١٠،١٢،١٥،٢٠،٣٠) مما يساعد فى كتابة الأعداد الكبيرة فى حيز محدود .

ولقد قسم البابليون اليوم إلى ٢٤ ساعة والساعة إلى ٦٠ دقيقة و الدقيقة إلى ٦٠ ثانية وظل هذا النظام الستونى مستعملا نحو ٤٠٠٠ سنة . فلكى نكتب مثلا ٣٠ ثانية ٢٥دقيقة ٥ ساعة بهذا الإسلوب نكتب كما يلى :

$$٥ \cdot \frac{٢٥}{٦٠} \cdot \frac{٣٠}{٣٦٠٠}$$

بينما النظام العشرى يؤدى إلى الكتابة التالية لنفس العدد

$$٥ \frac{٤}{١٠} \cdot \frac{٢}{١٠٠} \cdot \frac{٥}{١٠٠٠}$$

وهو نفس ما نضعه اليوم على هيئة ٥٫٤٢٥ ساعة

في عام ١٨٥٤ وجد سنكره لوحان من الطين على نهر الفرات يعود تاريخها إلى عام ٢٠٠٠ قبل الميلاد ، وبهما جدولان يعطيان مربعات الأعداد من ١ إلى ٥٩

فمثلا $٨^٢ = ١٤$ أى $٨^٢ = ١ \times ٦٠ + ٤ = ٦٤$

وهكذا حتى $٥٩^٢ = ٥٨١$ اى $(٥٨ \times ٦٠ + ١ = ٣٤٨١)$

ومن نقاط الضعف الأساسية في هذا النظام هو عدم وجود الصفر ٠ لأن هذا معناه أن الأعداد ليس لها تمثيل واحد وإنما يتطلب الآن توضيح السياق الذى كتب به العدد ، لكى نعرف مثلا ما إذا كان العدد ١ يعنى فعلا ١ أو ٦١ أو ٣٦٠١ ... إلخ .

أما بالنسبة للضرب فقد استخدم البابليون الصيغة

$$\text{ا . ب} = \left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)^٢$$

وبذلك حولوا الضرب إلى جمع وطرح . فمثلا

$$٧ \times ١٣ = \left(\frac{٧ + ١٣}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{٧ - ١٣}{٢}\right)^٢$$

$$= ١٠٠ - ٩ = ٩١$$

أما فى القسمة فقد لجأ البابليون إلى تحويل القسمة إلى ضرب كما يلى

$$أ \div ب = أ \times \frac{١}{ب}$$

وأنشأوا جداول لحساب مقلوب الأعداد الطبيعية وبالطبع هذه المقلوبات كانت بدلالة النظام الستينى وليس النظام العشرى . وإليك بعض امثلة هذا المقلوب

٢		٣٠	
٣		٢٠	
٤		١٥	
٥		١٢	
٦		١٠	
٨		٧	٣٠
٩	٦	٤٠	
١٠	٦		
١٢	٥		

نلاحظ أنه فى هذا الجدول هناك فجوات ، فمثلا مقلوب ٧ ، ١١ ، ١٣ غير موجودة . ولكن هذا ليس معناه ان البابليين لم يكونوا قادرين على حساب $\frac{١}{١٣}$ مثلا . فهم يكتبون

$\frac{١}{١٣} = \frac{٧}{٩١} = ٧ \times (\frac{١}{٩١}) = ٧ \times (\frac{١}{٩٠})$ تقريبا ، وبالطبع مقلوب العدد ٩٠ موجود بالجدول

وفى الألواح البابلية التى إكتشفت حديثا وجد أن بعضها يعود إلى ١٩٠٠ ، أو ١٦٠٠ قبل الميلاد ، ويحتوى على إجابات لمسألة تتضمن ثلاثيات فيثاغورس أ ، ب ، جـ حيث

$$أ^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$$

ويقال إن هذا اللوح هو أقدم وثيقة فى نظرية الأعداد مكتشفه حتى اليوم

وفى لوح آخر موجود فى المتحف البريطانى ترد المسألة التالية :

الطول ٤ والقطر ٥ . احسب العرض وتأتى الإجابة كما يلى :

خمسه فى خمسة ٢٥ وأربعة فى أربعة ١٦ وبأخذ ١٦ من ٢٥ نحصل على ٩ . ماهو العدد الذى مربعة ٩ ؟ الإجابة ٣ . وإذن العرض ٣ .

أما المصريون القدماء فكان لهم نظام عددى آخر قريب من النظام الرومانى ، وهو نظام لابئس به فى عمليات الجمع ، لكنه ليس ملائما أبدا لعمليات الضرب .

لقد كان المصريون القدماء عمليين جدا فى تعاملهم مع الرياضيات ، وهو أمر واضح فى ورقة بردى رند Rhind (نسبة إلى عالم الآثار الأسكتلندى هنرى رند) وفى ورقة بردى موسكو ، وتعود كل من الورقتين إلى حوالى ١٨٥٠ قبل الميلاد .

وعلى خلاف اليونانيين الذين كانوا يفكرون فى الأعداد بشكل مجرد ، نجد أن المصريين القدماء كانوا مشغولين بالحساب العملى . فهم يفكرون في ثمان مقاعد أو سبعة قوالب طوب عندما يذكرون العدد ٨ أو ٧ .

ولعلاج نقط ضعف نظامهم فى كتابة الأعداد لجأوا إلى حيل مختلفة للقيام بعمليات الضرب كما توضح ورقة الرند على النحو التالى :

نفرض أننا نريد ضرب ٤١ × ٥٩

ناخذ ٥٩ ونضيف إليها نفسها ، ثم نضيف الناتج إلى نفسه وهكذا نستمر

	٤١	٥٩
×	١	٥٩
	٢	١١٨
	٤	٢٣٦
×	٨	٤٧٢
	١٦	٩٤٤
×	٣٢	١٨٨٨

وحيث أن ٦٤ > ٤١ فلا داعى لإستكمال الجدول بعد ٣٢

والآن ٤١ -٣٢ = ٩ ، ٩ - ٨ = ١ ١٥ - ١ = .

وإذن ٤١ = ٣٢ + ٨ + ١

والآن نضع العلامه × على الأعداد الملائمة فى الجدول ثم نجمع فنحصل على ٢٤١٩

وبالطبع يمكن كتابة الجدول معكوسا على النحو التالى

	٥٩	٤١
×	١	٤١
×	٢	٨٢
	٤	١٦٤
×	٨	٣٢٨
×	١٦	٦٥٦
×	٣٢	١٣١٢

وحيث أن ٥٩ = ١ + ٢ + ٨ + ١٦ + ٣٢ نضع علامة × على الأعداد الملائمة ونجمع فنحصل على ٤١ + ٨٢ + ٣٢٨ + ٦٥٦ + ١٣١٢ = ٢٤١٩ .

تابع (٤)

(الرياضيات فى الحضارة اليونانية)

التأريخ الزمنى للعلم اليونانى :

يجمع المؤرخون اليوم على أن تاريخ العلم اليونانى يشغل فى الحقيقة نحو ٩٠٠ عام ، وهو ينقسم إلى ثلاث مراحل كل مرحلة منها حوالى ٣٠٠ سنة .

فالمرحلة الأولى وهى اشدها خصوبة وأصالة من زاوية ظهور كل الأفكار الجديدة فيها والتأكيد على صلة العلم بالإنسان . ولذلك تعرف هذه المرحلة احيانا بإسم " المرحلة البطولية " . ومع ذلك فهذه المرحلة لم تستطع ان تقدم – رغم أفكارها الغنية – النتائج العلمية المفصلة التى عرفت بها المرحلة الثانية . وتبدأ المرحلة الأولى من حوالى ٦٠٠ قبل الميلاد إلى موت أرسطو فى ٣٢٢ ق.م

وبعض المؤرخين يقسمون هذه المرحلة إلى فترتين : من ٦٠٠ ق.م إلى ٤٠٠ ق.م وهى التى شهدت نشأة وتطور المدرسة الأيونية . أما الفترة من ٤٠٠ ق. م إلى ٣٢٢ ق.م فهى الفترة التى شهدت تطور الفلسفة والتى خلقت لغة المنطق على وجه الخصوص وتشمل هذه الفترة حياة واعمال أشهر الفلاسفة اليونانيين : سقراط وأفلاطون و ارسطو .

والمرحلة الثانية (وتسمى المرحلة الهللينية) ويميل كثير من المؤرخين إلى إعتبار تاسيس مدرسة الإسكندرية بدءا لها وهى تنتهى عندهم بإكتمال الغزو الرومانى للشرق حوالى بدء المسيحية .

وتنقسم هذه المرحلة إلى فترتين : إحداهما من ٣٢٠ ق.م إلى ١٢٠ ق.م وهى الفترة الأشد أهمية ففيها تكونت تحت رعاية البطالسة بالإسكندرية فروع كاملة من العلم على أسسها الحالية تقريبا . إنها الفترة التى أنجبت الرياضيين الثلاثه العظام : أقليدس وأرشميدس وأبو لونيوس فإقليدس قنن الرياضيات ونظمها فى كتابه (الأصول) الذى ما يزال يدرس حتى اليوم تقريبا وأرشميدس له مساهماته العبقرية فى الهندسة والرياضيات عموما والميكانيكا . وأبولونيوس قدم مساهمات عن القطاعات المخروطية التى إستخدمها جاليليو وكبلر ونيوتن كما هى فى علمى الفلك والقذائف بعد ذلك بأكثر من ألف عام .

أما المرحلة الثالثة فهى القرون الثلاثة الأولى للإمبراطورية الرومانية ، أى منذ مولد المسيحية حتى ٣٠٠ بعد الميلاد . وهذه المرحلة هى أقل المراحل أهمية من ناحية المعرفة الرياضية وربما كان أهم إنجاز تم فيها هو كتاب ديوفاتيس (٢٥٠ بعد الميلاد) فى الحساب وإسمه Arithmatica

المدرسة الفيثاغورية :

يقال أن فيثاغورس من أصل فينيقى ، إن كان قد إستقر فى كريتون (جنوب إيطاليا) وكان فيثاغورس سياسيا نشيطا إرتبط بطريقة التجار واشتد تأثيره فى محيطه سياسيا ودينيا إلى درجة أن المؤرخ البريطانى جورج طوسون يقارن وصفه بوضع المصلح البروتستانى كلفن فى جنيف .

وقبل أفلاطون كانت هناك نزعتان فى الفكر اليونانى : النزعة المادية والنزعة المثالية التى نشأت على يد مدرسة فيثاغورس فى الغرب .

ولقد تكونت حول فيثاغورس مدرسة وجماعة نصف رياضية نصف دينية تهتم بممارسة الزهد ودراسة الرياضيات فى آن واحد فى عصر تميز بالهزيمة المؤقته لليونانيين على يد الفرس .

ولقد وجدت هذه المدرسة فى الرياضيات مفتاحا للغز هذا الكون واداة لتنقية الروح حتى قال أحد أعضائها : إن وظيفة الهندسة هى إبعادنا عن المحسوس والفانى إلى المعقول والخالد . فتأمل الخالد هو غاية الفلسفة كما أن تأمل الغامض هو غاية الدين .

ولقد رأى فيثاغورس فى الأعداد مفتاح فهم الكون ، فالخط المستقيم يتحدد بنقطتين كما يتحدد المستوى بثلاث نقاط ويتحدد الحجم بأربع نقاط ، ومن هنا إتجه فيثاغورس إلى إعتبار الكون كامنا فى هذه الأعداد .

الفيثاغورثيون إذن يعيدون كل شئ إلى العدد ، ويمكن بناء هذا العالم من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤ ولذا فليس غريبا أن يكون العدد عشرة - مجموع ١ ، ٢، ٣، ٤ - يمثل قوة إلهية جبارة . ونظريته في الأعداد لم تكن رياضه فحسب ولا فيزياء فحسب ، وإنما كانت دينا كذلك .

وهم يعتبرون المشتغلون بالرياضيات حفظه سر إلهى لا يجوز إفشاؤه حتى أن أحد تلاميذ المدرسة (هيبابوس) مات غرقا في الحمام لأنه أفشى سر المضلع المنتظم ذى الإثنى عشر وجها .

وكان الفيثاغورثيون يتمادون في عملية المناظرة بين الأعداد والأشياء الموجودة في هذا العالم . فالأعداد الفردية مذكرة والزوجية مؤنثة . والعدد ١ ليس عددا في حد ذاته بل هو مصدر كل الأعداد فلذا فهو رمز للتعقل ، والعدد ٢ رمز للرأى ، والعدد ٣ رمز للقدرة الجنسية ، والعدد ٤ رمز للعدل والعدد ٥ رمز للزواج وهكذا .

ومن الأعداد البهي الكريم ومنها الكئيب المضجر ، فالأعداد التامه بهية وكريمة لأنها نادرة الوجود (العدد التام هو الذى مجموع عوامله هو العدد نفسه مثل ٦ = ١+٢+٣ ، ٢٨ = ١+٢+٤+٧+١٤) . وقد أمضى نيوماخوس السكندرى (المنتمى للمدرسة الفيثاغورثية الحديثه) زمنا طويلا إلى أن أهتدى إلى العددين التامين التاليين وهما ٤٩٦ ، ٨١٢٨ ، ثم بذل جهدا فارقا

للحصول على العدد التام التالى فلم يوفق فإستاء من ذلك كثيرا [نعلم اليوم أن هذا العدد هو ٣٣٦ر٥٥٠ر٣٣]

والأعداد هى عند الفيثاغورثيين أخلاق أيضا . سئل فيثاغورس عن تعريفه للصديق فقال : صديقك من كان صورة منك مثل العددين ٢٢٠، ٢٨٤ .

وتفسير ذلك أن الأعداد الصحيحة التى يقبل العدد ٢٨٤ القسمة عليها هى (١،٢،٤،٧١،١٤٢) ومجموعها ٢٢٠ والعكس صحيح .

وكل هذه الدراسات النصف رياضية والنصف دينية كانت ذات فائدة كبرى فى تطوير نظرية الأعداد فيما بعد . وتعتبر دراستهم للأعداد الأولية هى التمهيد الأول لنظرية الأعداد الحديثه .

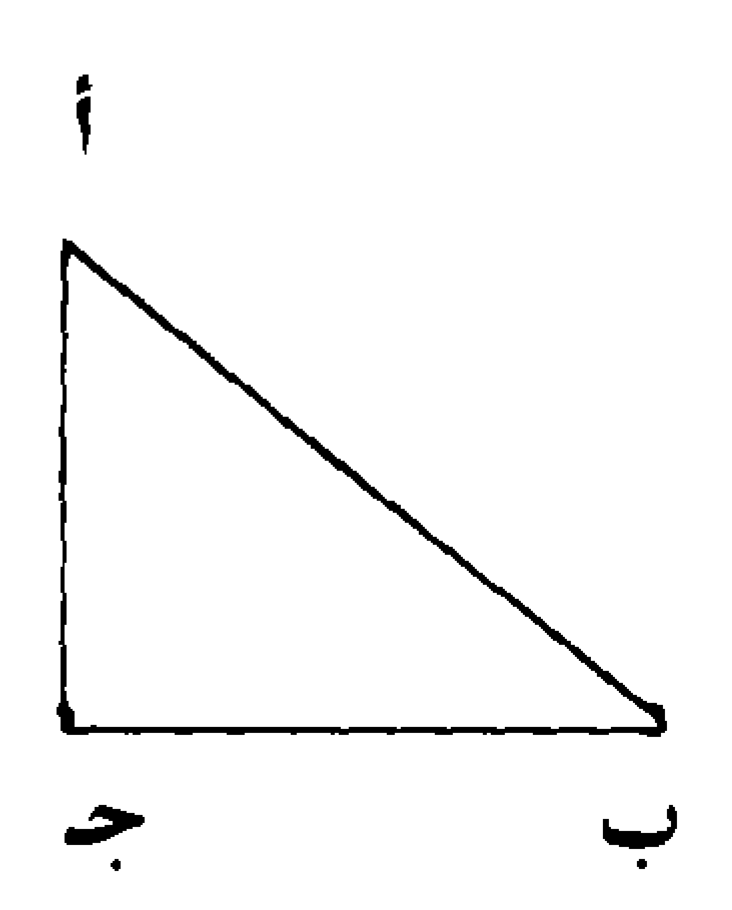
<u>أزمة الفيثاغوريين :</u>

فى منتصف القرن الخامس قبل الميلاد أصيبت المدرسة الفيثاغورية بصدمة علمية أدت فى نهاية الأمر إلى إنهيارها ، إذ أصابت هذه الصدمة صميم موقفها من الأعداد .

فقد تصور الفيثاغوريون النقطة بإعتبارها ذات كيان ، ولذا فمن الطبيعى أن يكون عدد النقط فى الخط المستقيم محدودا . هنا ما إفترضه الفيثاغوريون حتى ولو لم تكن لديهم فكرة واضحة عن هذا العدد بالضبط .

وقد ترتب على هذه الفكرة الربط الوثيق بين الحساب والهندسة فلكل خط مستقيم عدد صحيح يرتبط به (هو عدد النقط المكونه له) وهو ما

تعبر عنه بطول الخط المستقيم . ومعنى هذا أن النسبة بين طول الوتر وطول الضلع في المثلث القائم الزاوية $\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}\right)$ هي نسبة بين عددين صحيحين اى عدد نسبى



والآن إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية أ ب جـ فيه أ جـ = ب جـ وإعتبرنا أ جـ وحدة القياس فإن أ ب^{٢} = ١ + ١ = ٢ حسب نظرية فيثاغورس

ومن الطبيعى أن تتساءل المدرسة عن طول أ ب ، أى عن العدد النسبى الذى إذا ربعناه أعطانا العدد ٢

ولقد بذلت المدرسة جهودا ضخمة للحصول على هذا العدد ، ثم إكتشف الفيثاغوريون ببرهان جبرى بسيط ان هذا العدد غير موجود .

<u>البرهان :</u> نفرض ان $\sqrt{٢} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ حيث م ، ن أعداد صحيحة ليس بينها عامل مشترك

$$\therefore \quad ٢ = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ن}^{٢}} \qquad \text{اى م}^{٢} = ٢ \text{ ن}^{٢}$$

إذن م^{٢} عدد زوجي وإذن م عدد زوجـى = ٢ ك مثلا حيث

ك عدد صحيح

أى أن ٤ ك^{٢} = ٢ ن^{٢} أى ن^{٢} = ٢ ك^{٢}

∴ ن^{٢} عدد زوجي وإذن ن عدد زوجي

أى ان كلا من م ، ن عدد زوجي وهذا يناقض الفرض

وإذن لا يمكن وضع $\sqrt{٢}$ في صوره عدد نسبى

ولقد كان أمام الفيثاغورثيين أحد طريقين للخروج من هذا المأزق : فإما أن تكون فكرة القياس غير حقيقية ، أو أن يوسع مفهوم العدد ليتضمن الأعداد غير النسبية irrational أيضا ، كما إقترح عمر الخيام بعد ذلك بقرون في كتابه (الجبر) .

وإتجه الفيثاغورثيون إلى الحل الأول وهذا أبعد القياس عن الهندسة وإشتد الإتجاه للبحث عن براهين مستقلة للنظريات الهندسية ليس بها ذكر لفكرة القياس ، أى إشتد الإتجاه للعزل بين الحساب والهندسة ، ولم يبدأ الربط بينهما من جديد إلا على يد ديكارته في القرن السابع عشر عندما بدأت المدرسة الجبرية الحديثة في الهندسة .

والمؤرخين يدهشهم تعثر علم الجبر في الحضارة اليونانية وضآلة التقدم الذى تم على يد ديوفاتيس في مرحلة متأخرة جدا ولهذا التخلف أسباب عديدة منها الإفتقار إلى لغة رمزية يستحيل تقدم الجبر طويلا بدونها ، ومنها أزمة المدرسة الفيثاغورية التى أدت إلى عزل الجبر عن أحد منابعه الخصبة (الهندسة) .

وهنا يطرح السؤال التالى : لماذا إتجه الفيثاغوريين إلى الحل الأول للخروج من الأزمة ولم يتجهوا للحل الثانى ؟

يبدو أن السبب يكمن فى إدراكهم أن قبول الحل الثانى كان فى الحقيقة يعنى التخلى عن فكرة العدد المحدود من النقط فى الخط ، وقبول إن كل خط مستقيم محدود يحتوى على عدد لانهائى من النقط ، ومعنى هذا قبول الغرض الأقليدى الذى جاء فيما بعد عن النقط التى تشغل موقعا ولا تشغل حجما . وقبول مثل هذا الفرض كان يعنى إنهيار النظام الفيثاغورى بأكمله ، ولهذا كان من الطبيعى أن يبتعد الفيثاغوريون عن الحل الثانى .

بالطبع لابد أن نذكر أن الفرض الأقليدى عن النقطة لم يحل المسألة نهائيا . فنحن نعلم أن أزمات رياضية عديدة ثارت من ذلك وكانت مترتبة على هذا التعريف . ونشير إلى ما أثاره كانتور خول ما يترتب على هذا التعريف من أن جزء اللانهاية يساوى كل اللانهاية وهى أبحاث خصبة لا مجال للدخول فيها هنا .

<u>تقييم المدرسة الفيثاغورية :</u>

- أدخل الفيثاغوريون فكرة التطهر من خلال المعرفة الناتجه عن التأمل السلبى ، وأغراهم بهذا بحثهم فى الهندسة وإكتشافاتهم التى بدت وكأنها لا صلة لها بالواقع أو كأنها نوع من الكشف الصوفى . ولذا بدأ أنها تمثل معرفة تسمو على المعرفة التجريبية . ولقد عبر أفلاطون عن هذا الموقف عندما كتب على باب الأكاديمية (المدرسة التى كان يقودها) : " لايدخلها إلى المشتغلون بالهندسة "، ولقد صنف أفلاطون رواد الألعاب

الأوليمبية إلى ثلاثة أنواع : الذين يذهبون للبيع والشراء ، واللاعبون ، ثم النظارة . وعنده أن النوع الأخير هو أرقى الأنواع لأنهم يتاملون ؟

وهذه الفكرة عن العلم البحت كعملية تأمل مازالت موجودة حتى

لبع فإن هذا لايمنعنا من تأكيد الجوانب الإيجابية في المدرسة الفيثاغورية ، نقصد النتائج الفعلية التى حققوها فى العلوم الرياضية بما فى ذلك نظرية فيثاغورس عن المثلث القائم الزاوية وابحاثهم فى نظرية الأعداد (الأولية ، المثلثية ، التامة .. إلخ) ثم دراستهم للحجوم المنتظمة التى مهدت لنظرية الزمر groups الحديثة ، ثم أبحاثهم فى جمع المتواليات بأنواعها المختلفة تلك الأبحاث التى طرحت مسألة جمع المتسلسلات اللانهائية وإن لم يفلحوا فى جمعها .

- لقد أسس الفيثاغوريون طريقة البرهان الرياضى بالإستنباط Deduction إبتداء من مسلمات (مصادرات) معينة ، وهذا المنهج هو أشد وسائل تعميم الخبرة الرياضية قوة . لقد وضعوا بذلك اللبنات الأولى للمنطق الشكلى Formal logic الذى صاغ أرسطو بعد ذلك قوانينه ، والغريب أنهم لعبوا أيضا دورا فى التمهيد للمنطق الجدلى حتى ولو لم يدركوا ذلك . فنحن نعلم أن المستقيم محدود فى طوله وغير محدود فى عدد نقاطه ولا يزعجنا ذلك .

فقد عالجوا فى فترة متأخرة مسألة الإقتراب من جذر ٢ بالطريقة التالية

إبدأ بالزوج (١ ، ١) ومنه تكون الزوج (٢ ، ٣) بإضافة العددين ١ ، ١ فى العنصر الأول وإضافة ضعف الأول إلى الثانى للحصول على العنصر الثانى.

وبإستمرار فى هذه الطريقة نحصل على الإزدواج

(١ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٧) ، (١٢ ، ١٧) ، (٢٩ ، ٤١) ، (٧٠ ، ٩٩) ٠٠٠

فإذا فرضنا أن العدد الأول فى الزوج هو أ والعدد الثانى هو ب فسوف نلاحظ أن

$$٢ أ^{٢} - ب^{٢} = \pm ١$$

أى أن

$$٢ - \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} = \pm \frac{١}{أ^{٢}}$$

ولما كان أ يتزايد بإستمرار فمن الواضح أن $\frac{١}{أ^{٢}}$ يقترب بسرعة من الصفر ولذا

فإن $\frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$ تقترب بسرعة من ٢ ، أى $\frac{ب}{أ}$ يقترب بسرعة من جذر ٢

ويمكن التحقق مثلا من أن $\frac{٩٩}{٧٠}$ قريب جدا من $\sqrt{٢}$

أى أن $\sqrt{٢}$ يمكن تعريفه من خلال متوالية الأعداد النسبية

$$\left(\frac{٣}{٤}, \frac{٧}{٥}, \frac{١٧}{١٢}, \frac{٤١}{٢٩}, \frac{٩٩}{٧٠} \cdots\right)$$

أو بمعنى آخر فإن هذه المتوالية تحمل فى طياتها وجهين مختلفين : العدد النسبي ، والعدد غير النسبى $\sqrt{٢}$

(٥)

متحف الإسكندرية أو (مدرسة الإسكندرية)

تعتبر مدرسة الإسكندرية بمنجزاتها العلمية المساهمة العلمية الأساسية للعصر الهلليني (تبدأ المرحلة الهللينية من ٣٢٠ ق.م وتنتهى بإكتمال الغزو الرومانى للشرق حوالى بدأ المسيحية) ، وتعتبر الفترة من ٣٢٠ ق.م إلى ١٢٠ ق.م (مرحلة الإسكندرية) أشدها أهمية ، فهى التى تكونت فيها تحت رعاية البطالمة بالأسكندرية فروع كاملة من العلم على أسسها الحالية تقريبا . إنها الفترة التى قدمت للبشرية الرياضيين الثلاثه العظام : إقليدس وأرشميدس وأبو لونيوس.

قبل متحف الإسكندرية لم تعرف البشرية أى محاولة واعية فى إتجاه تنظيم العلم وتمويله فى كافة فروعه . وعلى الرغم من تقدير دور الأكاديمية (أفلاطون) ودور اللقيوم (أرسطو) إلا أن المتحف هو أول مؤسسة أبحاث تحتضنها الدولة وتنفق عليها . وقد ساهم المتحف فى تطوير العلم أكثر من أى مؤسسة قبله أو حتى بعده إلى اليوم .

وإذا قيمنا الإنتاج العلمى للمتحف بالإضافة إلى أعمال مراسليه (مثل أرشميدس) لوجدنا أنه أكثر تخصصا من أى شئ سبقه أو لحقه بألفى عام . ولقد إتبعت المرحلة المبكرة من العلم السكندرى خطوات أرسطو ومدرستة ، ولذا يمكن إعتبار المتحف فى أوائل أيامه الفرع الرئيسى للقيوم ، ثم تفوق الفرع على الأصل بما منح من

إمتيازات . ولم يكن من النادر أن يجمع الباحثون الكبار بين التدريس فى أثينا والإسكندرية معا . فقد تولى أستراتو مثلا مهمة التدريس والبحث فى المكانين ، وكان لهذا الأمر فائدة كبيرة وتأثير إيجابى على المدرستين .

الرياضيات :

تطور العمل فى العلوم الرياضية والطبيعة بهدفين واضحين : أكاديمى وعملى وكان العمل الأكاديمى هو الأهم عند علماء الإسكندرية ، وتركز فى مجال الرياضيات ، وإنتهى على يد إقليدس إلى إنجاز أعظم مهمة وهى تقنين فرع الهندسة .

وفى مجال الهندسة أيضا تم الحصول على نتائج محددة مثيرة للإعجاب . فأرشميدس طبق وحسّن طريقة إيدوكسس (طريقة الإستغراق) فى تحديد قيمة ط إلى خمسة أرقام عشرية ، وفى إيجاد قانون حجم الكرة ومساحة سطحها وسطح الإسطوانة والمخروط ... إلخ .

وكان هذا العمل بداية حساب التكامل الذى حقق ثورة فى علم الطبيعة على يد نيوتن وفى العلوم الرياضية على يد ليبنتز ونيوتن .

ومن الأشياء ذات المغزى ما قدمه أبولونيوس (٢٢٠ ق.م) فى دراسة منحنيات الدرجة الثانية التى عرفت بإسم القطاعات المخروطية (القطع الناقص ، القطع الزائد ، القطع المكافئ) وكان

عمل أبولونيوس من الكمال بحيث أخذه نيوتن وكبلر كما هو ودون أى تغيير وطبقه فى وصف مسارات الكواكب فى السماء . على أن أهم منجزات الرياضيات فى تلك المرحلة تتحدد فى تنظيم وتقنين الهندسة على يد إقليدس .

لقد كان الربط المنطقى معروفا قبل إقليدس . لكن ربط جزء كبير من المعرفة الرياضية فى بناء واحد من الإستنباط الذى يبدأ من المسلمات (المصادرات) لم يعرف قبل إقليدس وكانت قيمة هذا بالنسبة للرياضيات كبيرة جدا كما يتضح من حقيقة أن إقليدس مازال أساس تعليم الهندسة حتى اليوم فى المرحلة قبل الجامعية .

ولقد تضمن كتاب إقليدس (الأصول The elements) تعريفات وفروض، ثم مصادرات تبنى على أساسها نظريات الهندسة . ولقد بدت هذه المصادرات من الوجهة العملية غير قابلة لأى شك ، وكان على البشرية أن تنتظر حتى القرن الثامن عشر حتى يظهر رجال جدد يشككون فى المصادرة الخامسة (مصادرة التوازى) فيستعيضون عنها بمصادره أخرى.

ومصادرات إقليدس الخمس هى :

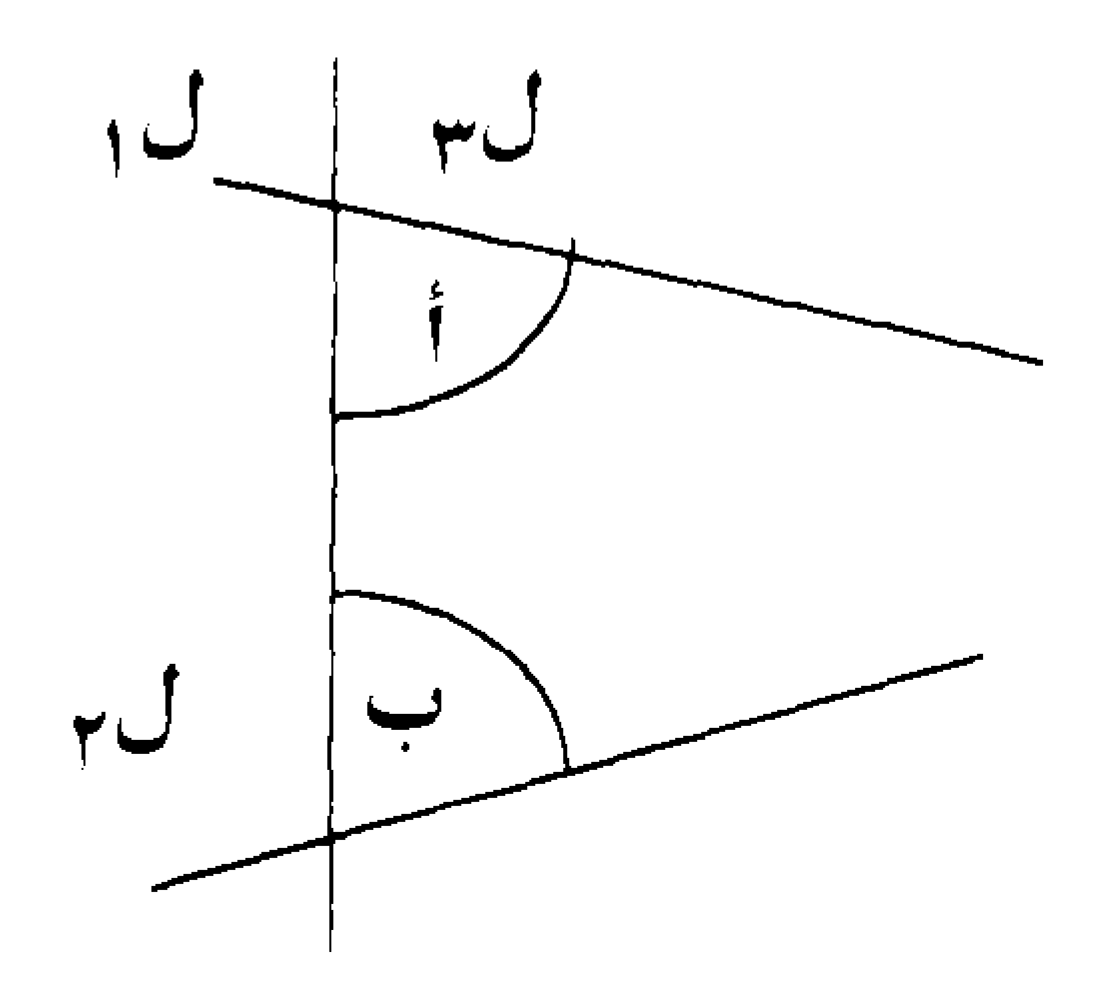
(أ) يمكن رسم خط مستقيم بين اى نقطتين .

(ب) يمكن مد أى مستقيم محدود دون نهاية .

(جـ) يمكن رسم دائرة مركزها نقطة معطاة ونصف قطرها أى مقدار معلوم.

(د) كل الزوايا القائمة متساويه .

(هـ) إذا قطع مستقيم ل٣ مستقيمين ل١ ، ل٢ يقعان في مستوى ، وكان مجموع زاويتى الداخل أقل من قائمتين فإن المستقيمين ل١ ، ل٢ سوف يلتقيان إذا مدا بشكل كاف على الجانب حيث مجموع الزاويتين أقل من قائمتين



أى إذا كانت < أ + ب < ١٨٠° فإن الخطين ل١ ، ل٢ سوف يلتقيان على الجانب الأيمن من المستقيم ل٣.

وتعرف هذه المسلمة (هـ) بالمسلمة الخامسة ، واحيانا مسلمة التوازى لأنه يمكن في الحقيقة أن نثبت أن هذه الصياغة للمسلمة الخامسة تتكافئ مع صياغة أخرى لنفس المسلمة على النحو التالى :

إذا علم مستقيم ل ، ونقطة ق خارجه فإنه يمكن رسم مستقيم واحد يمر بالنقطة ق ويوازى المستقيم ل

× ق

ل ______________________

وينقسم كتاب إقليدس (الأصول) إلى عدة أجزاء من ١ إلى ١٣ .
فالأجزاء الأربعة الأولى مخصصة للهندسة المستوية ، والأجزاء ٧ ، ٨ ، ٩ تتعلق بالحساب وتختص كلها بالأعداد النسبية (العدد النسبى هو الذى يمكن وضعه فى صورة $\frac{م}{ن}$ ، حيث م ، ن أعداد صحيحة) أما الأجزاء ٥ ، ٦ فهى خاصة بنظريات التناسب كما تتضمن تطبيقات على المساحات هى فى الواقع الحل الهندسى لمعادلات من الدرجة الثانية ، ومن الواضح أن الخوارزمى فى كتابه (الجبر والمقابلة) - بعد إقليدس بعدة قرون - كان متأثرا بطريقة إقليدس هذه فى معالجة معادلات الدرجة الثانية.

وتتعلق الأجزاء ١١ ، ١٢ ، ١٣ بهندسة الفراغ .

أما الجزء العاشر فهو أكمل الأجزاء ، وهو مؤسس على طريقة الإستغراق (Exhaustion) التى قيل إن إيدوكسس هو أول من إكتشفها، وأساسها التقريب المتتالى للمساحات عن طريق المثلثات المنتظمة الداخلية والخارجية ، كما شرحت من قبل ، للحصول على مساحة الدائرة ، ويعتبر الجزء العاشر - إذا نظرنا إليه من زاوية أخرى- مكرسا بالكامل للأعداد غير النسبية irrational مثل ط ، وكان لهذا الجزء ، بالإضافة إلى ترجمات الكتب العربية فى الرياضيات إلى اللاتينيه فى عهد الحروب الصليبية ، تأثير كبير على الرياضيين الإيطاليين فى عصر النهضة .

أرشميدس :

ولد أرشميدس فى سيراكوز (صقلية) من أسرة أرستقراطية وكان على صلة قرابة بملك سيراكوز .

وبسبب أرستقراطيته ، وبالرغم من إكتشافاته الفذة فى شئون الميكانيكا (الروافع) والكثافة النوعية للذهب والفضة ... إلخ إلا أنه كان يحتقر كل الإختراعات ذات الصبغة العملية ، وتظل إكتشافاته فى الرياضة البحتة هى الجزء الأهم الذى يرتبط بإسم أرشميدس .

وفى شبابه درس أرشميدس لفترة فى مدرسة الإسكندرية وظل يتراسل مع بعض أعضاء هذه المدرسة بعد عودة إلى بلاده وإذا إستبعدنا مساهماته الكبيرة فى الفلك والميكانيكا فسوف يبقى له الفضل فى إيجاد مساحة منحنيات وسطوح عدة مثل مساحة الدائرة ومساحة سطح الكرة ومساحة قطعة من قطع مكافئ ومساحات الأشكال الناتجة عن الدوران حول الخط الأفقى . وإثبات أن ط تقع بين $\frac{١}{٧}$ ٣ ، $\frac{١٠}{٧١}$ ٣ كما أعطى طرقا لحساب الجذور التربيعية .

ويشير برتراند رسل فى كتابه " تاريخ الفلسفة الغربية " إلى أن إيدوكسس إستخدم طريقة المضلعات الداخلية فحسب لبحث مساحة الدائرة . أما إستخدام طريقة المضلعات الداخلة والمضلعات الخارجة فتعود إلى أنتيفون فى رواية وإلى أرشميدس فى رواية أخرى .

ولقد مات أرشميدس مقتولا على يد جندى رومانى عندما غزا الرومان جزيرة صقلية بينما كان يتأمل شكلا هندسيا رسم على الرمال .

المسائل الثلاث القديمة :

وفقا لأفلاطون فإن علم الهندسة هو علم إستخدام المسطرة والفرجار وبهذا يمكن في رأيه بناء الهندسة كلها . ولذا فليس غريبا أن تحاول الرياضيات اليونانية التركيز على المسائل الثلاث التى عرفت بإسم " المسائل الثلاث القديمة " وهى

١ - كيف يمكن تثليث زاوية معلومة (أى تقسيمها بإستخدام المسطرة والفرجار إلى ثلاثة أجزاء متساوية) .

٢ - كيف يمكن بناء مكعب هو ضعف مكعب معلوم .

٣ - كيف يمكن إنشاء مربع مساحته تساوى مساحة دائرة معلومة .

وهذه المسألة الأخيرة عرفت تاريخيا فى الغرب بإسم مسألة " تربيع الدائرة Squaring the circle " ولم يكن آنذاك معروفا أن طـ عدد غير نسبى Irrational ، ولذا من المستحيل إيجاد قيمة طول ضلع المربع بالضبط ، والحقيقه أن إثبات أن طـ عدد غير نسبى لم يتم إلا خلال القرن التاسع عشر (١٨٨٢) على يد لندمان . ومنذ ذلك الوقت صار يطلق فى الأدبيات الغربية على أى مسألة مستحيلة إسم "تربيع الدائرة"

وإذا نظرنا إلى المسائل الثلاث سالفة الذكر فيمكن أن نقول أنه قد أصبح معروفا اليوم أنه لايمكن حلها بإستخدام المسطرة والفرجار فقط .

ديوفانتيس :

صاحب كتاب الحساب Arithmatica ، وهو كتاب كان له تأثير كبير على رياضيى مرحلة النهضة فى أوربا (بدا من القرن السادس عشر الميلادى) كما يظن أن الخوارزمى ربما كان على معرفة بهذا الكتاب .

وقد ظهر ديوفانتيس وبرز خلال الحقبة الأخيرة من تاريخ العلم اليونانى ، اى منذ بدء المسيحية إلى ٣٠٠ ميلاديا ، وقد وضع كتابه هذا حوالى ٢٥٠ م .

ولقد أوضحنا من قبل كيف أن نجاح الهندسة وأزمة الفيثاغوريين بالإضافة إلى إفتقاد رمزية ملائمة قد أعاق تطور علم الجبر ويعتبر عمل ديوفانتيس عن معادلات الدرجة الثانية الإستثناء الوحيد . وهذا العمل الذى جاء متأخرا قد يشير إلى نفوذ الرياضيات البابلية على هذا الرياضى الكبير .

لقد بدأ ديوفاتيس بوضع مسائل عن معادلات الدرجة الأولى ، ومنها المعادلة المشهورة التى كان فيها المجهول س هو عمر ديوفاتيس نفسه ، وقد أوصى قبل أن يموت أن تكتب هذه المسألة على قبره .

ثم تقدم بعد ذلك فى مناقشة معادلات الدرجة الثانية ووفق فى الحصول على بعض الحلول وهو أول من إستخدم المختصرات فى علم الجبر ، وليس بمستبعد أن يكون الخوارزمى قد قلد ديوفاتيس فى إستخدام المختصرات فى معالجة معادلات الدرجة الثانية فى كتابه " الجبر والمقابلة " ، فهو يعبر عن المجهول س سواء أكان أرضا أو نقدا ... إلخ بكلمة " شئ" أو جذر ، وعن $س^{٢}$ بكلمة مال .

على أن القضية الخطيرة الى طرحها ديوفاتيس فى كتابه هى حلول المعادلة

$$س^{ن} + ص^{ن} = ع^{ن}$$ ن عدد صحيح

بشرط أن تكون س ، ص ، ع تمثل أعدادا صحيحة موجبة .

ويطرح ديوفاتيس القضية فى حالة ن = ٢ ، هذه الحالة تعرف اليوم بفضل نظرية فيثاغورس أنها ممكنة الحل ، بل هناك عدد لانهائى من الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة .

$$س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}$$

ويمكن الحصول على هذه الحلول إذا كانت س عدد صحيح فردى من المتطابقة

$$(٢م + ١)^{٢} + [٢م (م + ١)]^{٢} = [٢ م (م + ١) +١]^{٢}$$

وإذا كانت س عدد صحيح زوجى فيمكن الحصول على الحلول من المتطابقة

$$(٢م)^{٢} + (م^{٢} -١)^{٢} = (م^{٢} + ١)^{٢}$$

ولكن ما الموقف فى حالة ن = ٣ ، ٤ ، ... إلخ .

هل هناك قيم صحيحة موجبة ص ، ص ،ع تحقق المعادلة

$$س^{٣} + ص^{٣} = ع^{٣}$$

أو بمعنى آخر كما يمكن تقسيم مربع كامل مثل ٢٥ ، ١٠٠ ، ... إلخ إلى مجموع مربعين كاملين

$$٢٥ = ٩ + ١٦ = ٣^{٢} + ٤^{٢}$$

$$١٠٠ = ٣٦ + ٦٤ = ٦^{٢} + ٨^{٢}$$

هل يمكن تقسيم مكعب كامل (مثلا ٢٧ ، ٦٤ ... إلخ) إلى مجموع مكعبين كاملين .

لم يستطع رياضى واحد أن يجد مثالا واحدا على ذلك .

والمطلوب البرهان على ذلك . لقد ظل كتاب ديوفاتيس حتى القرن السابع عشر مرجعا هاما فى الجبر ، وهذا الذى جعل الرياضى القرنسى فيرمات (القرن السابع عشر) يكتب على هامش نسخته من كتاب ديوفاتيس "عندى برهان لطيف لهذه النظرية وإن كان لا يتسع الهامش لكتابته "

أى أنه أدعى أنه أثبت أن المعادلة

$$س^{ن} + ص^{ن} = ع^{ن} \qquad ن > ٢$$

ليس لها حلول صحيحة موجبة

ولقد أمكن فى القرن العشرين إثبات صحة هذه النظرية فى حالات ن = ٣ ، ٤ ، ٥ ... إلخ لكن حتى عهد قريب لم يوجد برهان عام ، وإن كان أحد الأساتذة فى جامعة برنستون ذكر فى العام الماضى (١٩٩٤) أنه عثر على حل .

<u>سؤال :</u> هل يمكن إثبات أن المعادلة $س^{ص} = ص^{س}$ ليس لها حلول صحيحة غير حل واحد س = ٢ ، ص = ٤ وإن كان لها عدد لانهائى من الحلول هى أعداد نسبية ؟

(٦)

رياضيات الحضارة العربية الإسلامية

الإسلام وحركة الترجمة :

خلال عهد الخليفة العباسي المنصور كان ضمن الوفد القادم من الهند إلى بغداد عالم هندي متخصص في علم الفلك . وكان للفلك أهمية كبيرة عند خلفاء الدولة العباسية لأنهم لم يكونوا يفرقون بين الفلك والتنجيم أي إستطلاع نجوم السماء لمعرفة أوقات السعد وأوقات النحس لتجنب أي عمل فيها .

ولقد قام هذا العالم الهندي بمساعدة الفزاري على ترجمة نص فلكي مكتوب باللغة السنسكريتية . وكانت نتيجة هذا العمل كتاب "زيج السند هند " الذي يحتوي على معلومات فلكية عديدة بما في ذلك طرق رياضية تستخدم الجيب .

ولقد أمر الخليفة المنصور - الذي بنى بغداد كعاصمة جديدة له - أن يبدأ العمل في وقت معين من يوم ٣٠ يوليو سنة ٧٦٢ قال عنه المنجمون إنه وقت سعد (أحد هؤلاء المنجمين كان الفزاري نفسه) . ولابد أن المنجمين قد أحسنوا عملهم إذ أن بغداد قد إزدهرت فعلا كمركز ثقافي وتجاري .

وخلال حكم هارون الرشيد تم بناء مكتبة كان من الممكن أن تجد بها أصول وترجمات أعمال علمية هامة باللغة السنسكريتية والفارسية واليونانية ، وهي الأعمال التي حفزت العلماء المسلمين الأوائل على العمل والإنتاج البحثي .

ثم أعطى الخليفة المأمون (٨١٣ - ٨٣٣ م) دفعة للنشاط العلمي عندما أسس معهدا للترجمة والبحث عرف بإسم " بيت الحكمة " . وفي هذا المعهد كان يعيش المترجمون ومساعدوهم الذين قاموا بترجمة أمهات الكتب اليونانية والسريانية والفارسية والسنسكريتية إلى اللغة العربية ، وإستخدم هؤلاء المترجمون - الذين إحتضنتهم عائلات ثرية بالإضافة إلى الخليفة - الطاقات الكامنة في اللغة العربية بإستخدام تفريعات مختلفة للجذر الأصلي للكلمة ، وبهذا خلقوا ما أصبح لغة مشتركة للعلماء من شمال إفريقيا إلى الصين .

وفي بغداد كان هناك مرصد فلكي ، وكان من العاملين في هذا المرصد وفي بيت الحكمة بعض من أعظم علماء ذلك العصر .

وبالإضافة إلى ذلك أرسل الخلفاء الأوائل من العباسيين بعثات إلى الأراضي الأجنبية للحصول على نسخ من الكتب الهامة لترجمتها . ومن الأمثله على هذا البحث المضني عن الكتب الأجنبية المتاعب التي واجهها مترجم من القرن التاسع - حنين بن إسحاق - في بحثه عن كتاب جالينوس في الطب . وهو يقول حسب النص الذي أورده روزنتال : " لقد بحثت بنفسي عن الكتاب في العراق

وسوريا وفلسطين ومصر حتى وصلت إلى الإسكندرية ولم أجد شيئا باستثناء دمشق التى وجدت بها نصف الكتاب ولكن ما وجدته لم يكن فصولا متتالية ولم تكن الفصول كاملة " .

والغريب أنه بعد ذلك بأربعمائة سنة تكرر هذا البحث عن العلم الأجنبى، ولكن هذه المرة كان الأوربيون هم الذين يسافرون إلى الأراضى الإسلامية بحثا عن النصوص العلمية العربية الثمينة . حدث هذا أيام الحروب الصليبية وبعدها ، تلك الحروب التى دارت طوال القرنين الحادى عشر والثانى عشر الميلادى وإنتهت بإخراج الصليبيين والقضاء على ممالكهم التى كانوا أسسوها فى المشرق العربى على طول ساحل البحر الأبيض المتوسط .

ولقد كان هنالك تشجيع غير قليل من جانب أهل بغداد من الأثرياء، ومثال ذلك الأشقاء الثلاثة المعروفون بإسم " بنو موسى" . فبالإضافة إلى سفرهم حتى إلى الأراضى البيزنطية لشراء الكتب والقيام بالأبحاث فى الرياضيات والميكانيكا ، فإن هؤلاء المواطنيين كانوا من الرعاة الأوائل لثابت بن قره الذى كان يعيش فى حران (ديار بكر حاليا بتركيا) . ولقد عاش ثابت بن قرة من ٨٣٦ إلى ٩٠١ م ، ومنحت مواهبه فى اللغات الأجنبية اللغة العربية واحدا من أعظم المترجمين عن اليونانيه .

ووفقا لإحدى الروايات فإن بنى موسى إكتشفوا مواهب ثابت بن قره اللغوية عندما إلتقوا به فى حران إبان عملية صرافة ،

فـاحضروه معهـم إلى بغـداد للعمـل معهـم حيـث إزدهـرت مواهبـه الرياضية أيضا .

ومن المترجمين المهمين فى تلك المرحلة المبكرة للعلم الإسلامى حنين أبن إسحاق ، وإبنه إسحاق بن حنين ، وقسطا بن لوقا البعلبكى (نسبة إلى بعلبك فـى لبنـان) والحجـاج بـن مطـر . والجدول التالى يلخص بعض الأعمال الرياضية اليونانيـة الهامة التى ترجمت وأسماء المترجمين والتواريخ التقريبية لتلك التراجم .

الترجمات العربية عن اليونانية

المؤلــف	العنوان	المترجم	التاريخ
إقليدس	الأصول	الحجاج بن مطر إسحق إبن حنين ثابت بن قره	زمن هارون الرشيد والمأمون أواخر القرن التاسع مات عام ٩٠١ م
أرشميدس	البيانات Data البصريات الكرة والإسطوانة قياس الدائرة المضلع السباعى في الدائرة النظريات الصغيرة Lemmas	إسحق إبن حنين إسحق إبن حنين ثابت بن قرة ثابت بن قرة ثابت بن قره	مراجع ترجمة ضعيفة فى أوائل القرن التاسع
أبو لونيوس	القطاعات المخروطية	هلال الحمصى احمد بن موسى ثابت بن قرة	
ديوفانتيس	الحساب	قسطا بن لوقا البعلبكى	مات ٩١٢ م
منيا لاوس	الدائرة	حنين إبن إسحاق	ولد ٨٠٩ م

<u>نظرية عامة على المرحلة :</u>

مثل أى حضارة لم تكن الحضارة العربية الإسلامية ثابتة فى دعمها للعلم والعلماء . فبعد عهد المأمون بوقت غير طويل تضاءل الدعم الممنوح لبيت الحكمة ثم إختفت تلك المؤسسة العلمية وفى القرن التالى كتب السجزى شاكيا من أن الناس يعتبرون الإشتغال بالرياضيات كفر وأن قتل الرياضى حلال ! وربما كان السبب أن معظم الرياضيين كانوا أيضا فلكيين وبالتالى منجمين . والسبب الآخر هو أنه عند بعض المتزمتين فإن الإشتغال بالرياضيات يغرى بالإشتقال بالفلسفة ، والفلسفة عند هؤلاء طريق الكفر .

على أن السبب الأهم هو أن الإزدهار الذى صاحب العصر العباسى الأول قد ذبل فى العصر العباسى الثانى عندما كان العسكريون الأتراك السلاجقه هم الحكام الحقيقيون وكان الخلفية مجرد رمز فى معظم الأحيان . وعندما إنقسمت الدول العربية الكبيرة إلى ممالك وإمارات مستقلة أوشبه مستقلة .حرص الحكام الجدد فى كل إمارة على أن يكون لديهم فلكيوهم ومراصدهم ، ولذلك شجعوا العلماء ودعموهم . فمثلا عندما إستولى الفاطميون على السلطة فى مصر ، وإستقلوا عن بغداد أسس الحاكم بأمر الله مكتبة عام ١٠٠٥ وسماها دار الحكمة (حتى اليوم لايزل مقر نقابة الأطباء فى القاهرة يسمى دار الحكمة) كان بها قاعة مطالعة وقاعات للتدريس ومنح العاملون بها رواتب وضمن معاشا للباحثين حتى يتفرغوا لدراستهم .

ولاينبغى أن ننسى أنه عندما دخل العرب الأندلس وأقاموا فيها قرونا وأسسوا فيها حضارة زاهرة كانت الرياضيات من العلوم التى . وجدت تشجيعا خاصا من الملوك والأمراء ، وظل هذا الوضع قائما حتى القرن الخامس عشر الميلادى ، إذ أن المسلمين أسسوا فى الأندلس حضارة عربية إسلامية دامت سبعة قرون .

ويمكن أن نقول بدون مبالغة أنه خلال الفترة ٧٥٠ - ١٤٥٠ م فإن الحضارة العربية الإسلامية أنتجت سلسلة من الرياضيين الكبار نجحوا فى إبتكار النظام العشرى بما فى ذلك الكسور العشرية ، وفى خلق علم الجبر ، وفى الوصول إلى إكتشافات هامة فى حسابات المثلثات المستوية والكرويه وفى إكتشاف طرق جديدة لإيجاد حلول عددية للمعادلات . وهذه القائمة ليست شاملة بالمرة .

على أنه يهمنا إبراز الإنجازات الكبيرة للحضارة العربية الإسلامية فى الجبر خصوصا ، الذى لم يكن معروفا كعلم مستقل قبل الخوارزمى ،حتى أن الأوربيين إستخدموا اللفظ العربى " الجبر" للتعبير عن هذا العلم فى اللغات الأوربية ، وصاروا يطلقون على أى عملية لحساب شئ " خوازمية " Algorithm نسبة إلى الخوارزمى .

وصحيح أن كتاب ديوفانتيس فى الحساب كان معروفا لدى العرب ومترجما إلى العربية ، وصحيح أيضا أن الحضارة الهدية القديمة كانت مصدرا آخر للجبر الإسلامى ، فقد كان العرب على

معرفة بكتاب براهما جوبتا الذى عاش فى النصف الأول من القرن السابع والذى احتلت أعماله الفلكية المسماه sidd hanta الذى عرف فى العربية بإسم " السد هنت " أهمية خاصة ، إلا أن علماء المسلمين لم يكونوا مجرد ناقلين لإنجازات الحضارة اليونانية القديمة والحضارة الهندية بل كانوا مطورين ومضيفين إضافات جوهرية . وإليهم يرجع الفضل فى مشروع " حسبنة الجبر " أى معالجة التقارير الجبرية وفق قواعد الحساب .

ولقد قاد هذا المشروع (حسبنة الجبر) الكرخى المتوفى فى بغداد فى القرن الحادى عشر ومن بعده السموأل (المتوفى فى ١١٧٥) إلى قوانين الأسس التى تم إستنباطها وكذلك قواعد الإشارات . وبحثت العمليات الجبرية على كثيرات الحدود لأول مرة فى التاريخ من جمع وطرح وضرب وقسمة وإستخدمت لأول مرة طريقة الإستنتاج الرياضى Mathematical Induction فى جمع متواليات من نوع $\sum_{س=١}^{ن} س = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ ومع ذلك تنسب هذه النتائج الهامة فى الكتابات الأوربية – إلى رياضيين أوربيين متأخرين، كما يقال إن طريقة الإستنتاج الرياضى تعود إلى بسكال .

فالنظرة التقليدية عند الأوربيين المحدثين تروى تاريخ الجبر الكلاسيكى كتتابع لثلاث أحداث منفصلة :

أ – صياغة معادلات الدرجة الثانية .

ب - الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة .

ج - إدخال وتوسيع الرمزية الجبرية .

ويقترن الحدث الأول عندهم غالبا بالخوارزمى ، ويقترن الحدث الثانى برياضى المدرسة الإيطالية فى القرن السادس عشر ، ويرتبط الحدث الثالث بأسميّ فيت " وديكارت .

يحدث هذا بينما برهنت أعمال ويبل حول الكرخى والخيام فى القرن التاسع عشر ومؤخرا أعمال لوكى عن الكاشى أن الصورة السابقة غير دقيقة ومغلوطة إلى حد كبير إذ كشف الأول من خلال ترجمته لجبر الخيام بصورة خاصه أنه قبل القرن السادس عشر بكثير حققت نظرية معادلات الدرجة الثالثه تقدما كبيرا على يد الخيام ، كما يستشف عن أعمال وبيك ولوكى أنه لا يمكن كتابة تاريخ الجبر بمعزل عن الحساب الجبرى المجرد .

إن الناظر فى كتاب الخيام فى الجبر سوف يجد أنه يؤكد على مسألتين :

١ - أنه لم يصلنا من اليونانيين أى شئ يتعلق بحل معادلات الدرجة الثالثة . وإذا كان أرشميدس قد طرح مسألة هندسية يمكن ردها إلى معادلة من الدرجة الثالثة فإنه لم يستطع لا هو ولاشارحوه صياغة هذه المسألة بطريقة جبرية . والذى قام بهذه المهمة هو الماهانى كما أن الحل يعود إلى أبو جعفر الخازن بإستخدام طريقة القطاعات المخروطية .

٢ - أن علينا أن نميز بين حل مسألة معينة من الدرجة الثالثة وبين إعداد منهجية عامة لحل معادلات الدرجة الثالثة (وهذا ما فعله الخيام فى كتابه "الجبر")

وأخيرا فإن تاريخ الإستنتاج الرياضى - عند الأوربيين المحدثين - يعود فى رأيهم إلى القرن السابع عشر الميلادى وينسبونه فى الأساس إلى باسكال الذى يسمونه " المكتشف الأول للإستنتاج الرياضى " ، بينما كما أوضحنا من قبل أن الكرخى ومن بعده السموأل هما أول من صاغا هذه الطريقة فى البرهان (حتى ولو لم تسم بهذا الأسم) وأنهما بإستخدامها قد إستطاعا إيجاد مجموع المتواليات الحسابية $\sum_{1}^{ن} س$ ، $\sum_{1}^{ن} س^{٢}$ ، $\sum_{1}^{ن} س^{٣}$ . . . .

وفى الصفحات المقبلة سوف نعرض لبعض الرياضيين البارزين فى الحضارة العربية الإسلامية وبعض إنتاجهم وبراهينهم ، وإن كنا سنقتصر على عدد محدود منهم لأن زمن هذا المقرر لا يتسع لغير ذلك .

(٧)

الحضارة العربية الإسلامية (يتبع)

(١) الخوارزمي

محمد بن موسى الخوارزمي ، من عائلة ثرية (بنو موسى) ، خدم الخليفة المأمون كما إرتبط بخليفة لاحق هو الواثق (٨٤٢ - ٨٤٧ م) بالقصة التالية التي أوردها الطبري . فالظاهر أنه عندما مرض الواثق مرضا خطيرا طلب من الخوارزمي أن يتنبأ له أن كان سيعيش أم سيموت . ولقد أكد له الخوارزمي أنه سوف يعيش خمسين سنة أخرى . لكن الواثق مات بعد عشرة أيام ، وربما ذكر الطبري هذه القصة في كتابه (تاريخ الرسل والملوك) ليبرهن على أنه حتى العلماء العظام يمكن أن يقعوا في الخطأ ، وربما أيضا ذكرها الطبري كدليل على حصافة الخوارزمي السياسية .

وللخوارزمي مساهمات أساسية في أربعة ميادين : في الحساب والجبر والجغرافيا والفلك ، ففي الحساب والفلك أدخل الخوارزمي الطرق الهندية في العالم الإسلامي ، بينما كان كتابه في الجبر ذا أهمية أساسية في تطوير هذا العلم . وأخيرا فإن منجزاته في الجغرافيا تمنحه مكانا مرموقا بين الأساتذة القدامى لهذا العلم .

وكتابه فى الحساب (كتاب الجمع والطرح وفق الحساب الهندى) أدخل النظام العشرى الذى طوره الهنود فى القرن السادس ، بالإضافة إلى إستخدام الصفر الذى جعل هذا النظام المستعمل حتى اليوم مناسبا جدا . وكتابه فى الحساب كان أول كتاب يترجم إلى اللاتينية فى القرون الوسطى ويتضح تأثيره على رياضيات الغرب من حقيقة أشتقاق كلمة Algorithm . فهذه الكلمة تستخدم اليوم للتعبير عن أى طريقة محددة لحساب شئ ما ، وهى تحوير لإسم الخوارزمى .

ولقد كان لكتاب الخوارزمى فى الحساب أهمية فائقة فى رياضيات الحضارة العربية الإسلامية ، إذ وفر للرياضيين المسلمين أداة سهلة أستخدمت بإستمرار منذ أوائل القرن التاسع . ومن كتاب أحمد الأقليديسى المكتوب حتى ٩٥٠ م إلى البحث الموسوعى لجمشيد الكاشى (مفتاح الحاسبين) فى عام ١٤٢٣ م كان النظام العشرى نظاما عاما للحساب فى الحضارة العربية الإسلامية ، وخلال قرن أو أكثر قليلا أدت دراسة الخوارزمى إلى إختراع الكسور العشرية ، وإستخدمت من جانب رياضيين مثل السمؤل بن يحيى (بالمغرب) فى القرن الثانى عشر لإيجاد جذور الأعداد ، ومن جانب الكاشى فى القرن الخامس عشر لإيجاد قيمة ط صحيحة لستة عشر رقم عشرى :

أما عمله المشهور الآخر فهو كتاب (الجبر والمقابلة) الذى أهداه للمأمون وهذا الكتاب أصبح نقطة البداية فى موضوع الجبر عند الرياضيين الإسلاميين ، كما أنه أعطى هذا العلم عنوانه المستخدم حتى يوم فى الغرب

Algebra . ولقد كان الحافز إلى تأليف هذا الكتاب هو تطبيق العلم على قوانين الشريعة لحل المشاكل الناجمة عن قانون الإرث الإسلامى ، فجزء كبير من الكتاب مخصص لهذه المشاكل . وهكذا أصبح كتاب الخوارزمى فى الجبر والمقابلة نموذجا للكتب التى جاءت بعده فى الجبر . فنجد مثلا ان كتاب أبو الكامل - المعروف بإسم الحاسب المصرى - يتضمن أيضا تطبيقات علم الجبر على مسائل المواريث .

وفى كتاب الخوارزمى تستخدم كلمتا " الجبر " و " المقابلة " بالمعنى التالى :

إذا كانت لدينا المعادلة ٥ س + ١ = ٢ - ٣ س و إستبدلناها بالمعادلة

٨ س + ١ = ٢

فإننا نكون قد " جبرنا " طرفى المعادلة بإضافة ٣ س إلى كل منهما .

أما المقابلة فهى إستبدال المعادلة ٨ س + ١ = ٢ بالمعادلة

٨ س = ١ ، أى طرحنا العدد ١ من الطرفين

وبالطبع فلم يستخدم الخوارزمى الرموز س ، س^٢ ... إلخ كما نستخدمها اليوم ، وإنما كان يستخدم كلمة " جذر " أو " شئ " للتعبير عن س، وكلمة " مال " للتعبير عن س^٢ . فيقال مثلا :

مالان وعشرة جذور تعدل ثمانية وأربعون درهما .

وهى بلغتنا الجبرية الحديثة ٢ س^٢ + ١٠ س = ٤٨

ويحل الخوارزمى المسألة لفظيا كما يلى :

ترد المالين إلى مال واحد . وقد علمت أن مـالا من مـالين نصفهمـا .
فاردد كل شئ في المسـألة إلى نصفه ، فكأنه قال : مال وخمسـة جذور يعدل
أربعة وعشرين درهما . أي بلغتنا الحديثة

$$س^{٢} + ٥ س = ٢٤$$

والغريب أن الخوارزمي كان يعرف الصيغة الجبرية للحل كما يتضح من قوله
التالي :

ننصف الجذور فتكـون إثنـين ونصـف ، ومالـه $\frac{٢٥}{٤}$ وإذا أضيـف إلى
الأربعة و العشرين درهمـا نحصل على $\frac{١٢١}{٤}$ وجـذره $\frac{١١}{٢}$. وإذا مـا أخـذ من
هذا إثنين ونصف يبقى ثلاثة وماله تسعة. ومعنى هذا أن الخوارزمـى قـد حل
لفظيا المسألة بالصورة التالية :

$$س^{٢} + ب س = جـ$$

$$س = \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} + ج} - \frac{ب}{٢}$$

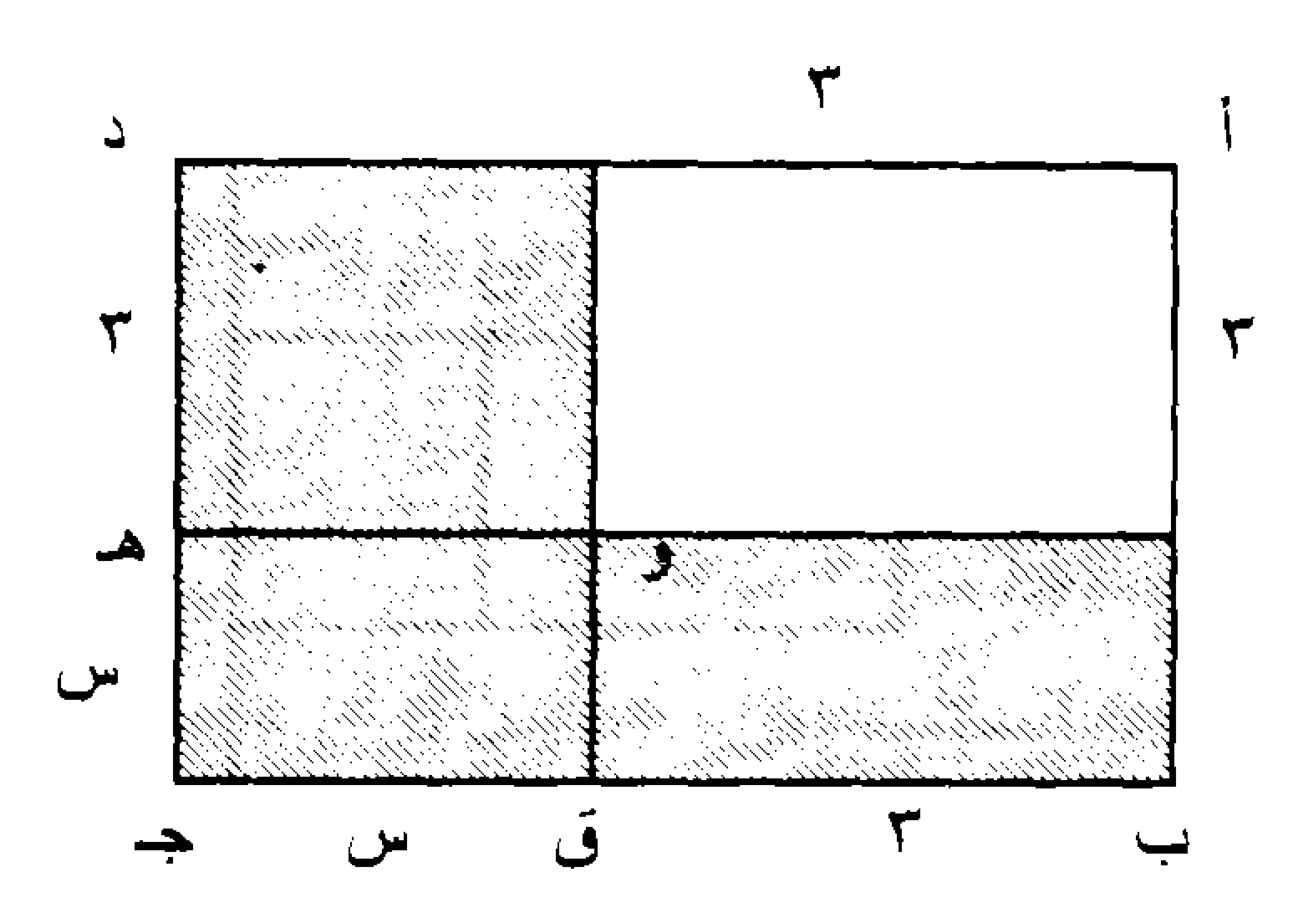
$$= \sqrt{\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} + ٢٤} - \frac{٥}{٢} = \sqrt{\frac{١٢١}{٤}} - \frac{٥}{٢} = \frac{١١}{٢} - \frac{٥}{٢} = ٣$$

وسنلاحظ هنـا أن الخوارزمـى أهمل الحـل السـالب وهـو س = - ٨
لأنه لا معنى للسالب في مسائل المواريث .

ومع ذلك فإن الخوارزمي - متأثرا في هذا بإقليدس - لم يكن يعتبر
هذا حلا للمسألة ، وأن البرهان الحقيقي هو البرهان الهندسي .

وإليك بعض الأمثلة التى تشرح طريقة البرهان الهندسى عند الخوارزمى

مثل (١) حل المعادلة $س^{٢} + ٦ س = ٧$



(أ) إرسم مربعا طول ضلعه مجهول س مثل و ق جـ هـ

(ب) نصف الجذور (٦ س) أى $\frac{٦}{٢} = ٣$

(جـ) مد أضلاع المربع فى إتجاه ب ، د بطول قدره ٣ فنحصل على المربع أ ب جـ د وطول ضلعه س + ٣

(د) مساحة المربع أ ب جـ د = مساحة الشكل المظلل + مربع مساحته ٩

وحيث أن مساحة الشكل المظلل هى $س^{٢} + ٦ س$ أى ٧

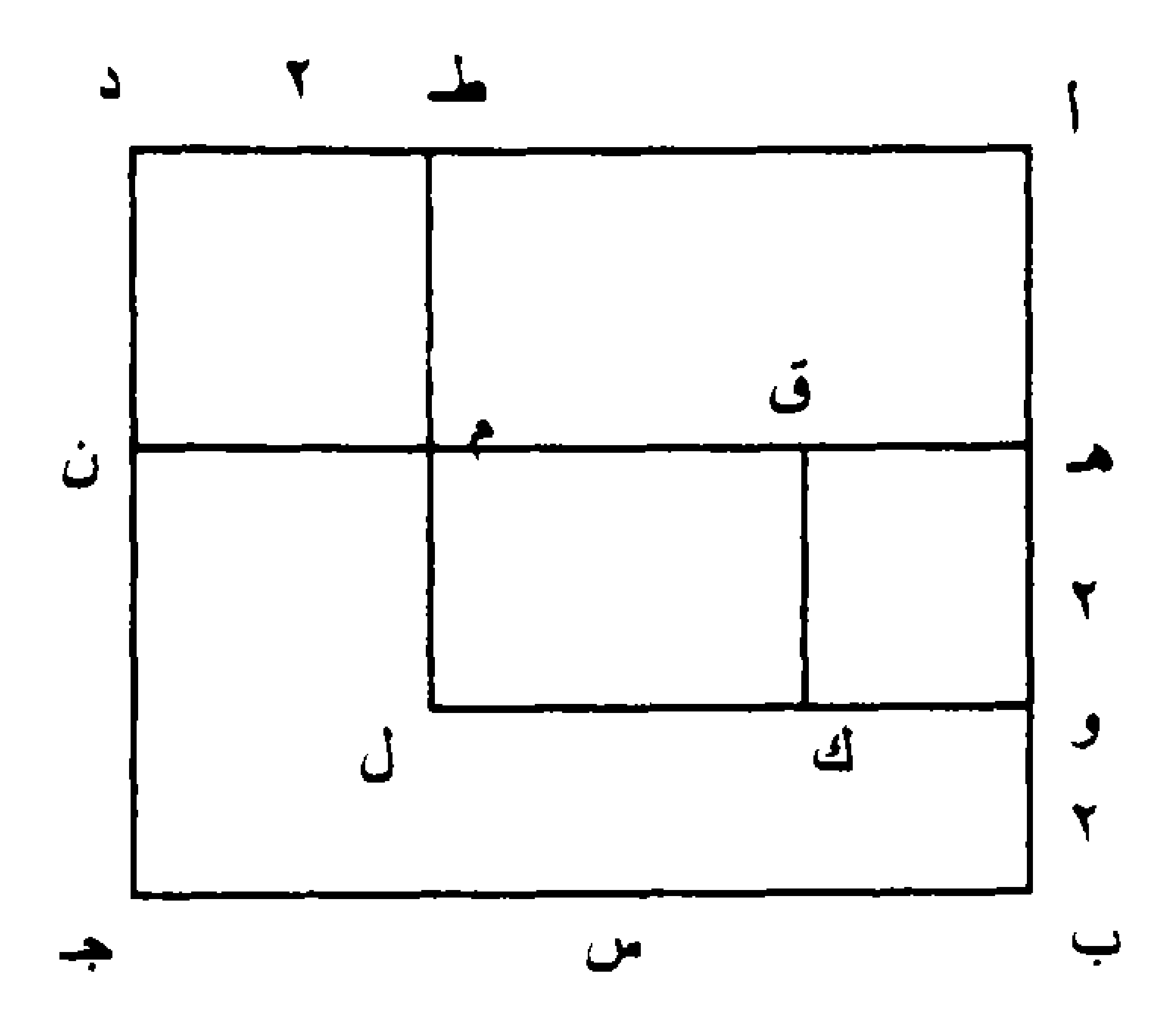
إذن مساحة المربع أ ب جـ د = ٧ + ٩ = ١٦ .

أى أن س + ٣ = ٤

أى أن س = ١

(٢) **هذا صنف آخر من معادلات الدرجة الثانية**

$$س^{٢} = ٤ س + ٥$$



(أ) إرسم المربع أ ب جـ د ومساحة $س^{٢}$ أى أن طول ضلعه مجهول وليكن س

(ب) خذ نقطة هـ على أ ب بحيث أن ب هـ = ٤ (معامل س)
نصف ب هـ فى و فيكون و هـ = ٢

(جـ) إرسم المربع هـ و ك ق فتكون مساحته = ٤

(د) مد وك إلى ل بحيث ك ل = أ هـ ثم أكمل المستطيل ق ك ل م

مساحة المستطيل ق ك ل م = مساحة المستطيل طـ م ن

د

لأن ك ل = أ هـ (عملا) = ط م

ولأن أ و = و ل اى أن أ و ل ط مربع

و إذن طـ د = و ب = ٢

(و) مساحة المستطيل هـ ب جـ ن = ٤ س ، ومساحة المربع أ ب جـ

د = $س^٢$

إذن مساحة المستطيل أ هـ ن د = ٥

ولكـن مسـاحة المسـتطيل أ هـ ن ذ = مسـاحة المسـتطيل

أ هـ م طـ + مساحة طـ م ن د = مساحة أ هـ م طـ + مساحة ق ك ل م

إذن مساحة المربع أ و ل طـ = ٥ + ٤ = ٩

أ و = ٣

إذن أ ب = ٥ أى أن

س = ٥

وأخيرا فإن من أهم الملاحظات التى تذكر عن كتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة) أنه حاول أن يعالج مسألة معادلات الدرجة الثانية معالجة منهجية فقسم هذه المعادلات إلى خمسة أصناف مثل قوله أموال وجذور تعدل عددا

(مثل $س^٢$ + ٦ س = ٧)

أو أموال تعدل جذورا وعددا (مثل $س^٢$ = ٤ س + ٥) وهكذا

(٢) عمر الخيام

لابد أن يكون عمر الخيام هو الرياضى المشهور فى هذا العالم الذى سميت باسمه نوادى اللهو ويعود هذا إلى الأشعار المنسوبة له والمعروفه بإسم (رباعيات الخيام) والمترجمة إلى عديد من لغات العالم . وفى الغرب نجد أن عمر الخيام معروف كشاعر أكثر منه رياضيا ، وقد كان فيتز جرالد أول من ترجم رباعياته إلى الإنجليزية . ومع ذلك فمساهماته فى الرياضيات والفلك كانت من الدرجة الأولى .

ولد الخيام فى نيسابور فى منطقة هى جزء من إيران اليوم وإن عرفت آنذاك بإسم خراسان حوالى ١٠٤٨ ، أى فى أوائل القرن الحادى عشر وفى زمن كان الأتراك السلاجقة يحكمون خراسان وكانت مدنها الرئيسية هى نيسابور ، بلخ ، مرو ، طوس ... إلخ .

ولقب الخيام يشير إلى أنه هو أو أبوه مارس صناعة الخيام يوما ما . ولقد أظهر إهتماما مبكرا بالعلوم الرياضيه ، لكننا لا نعرف غير هذا عن مرحلة شبابه وهناك قصة بأنه زامل فى المدرسة تلميذا عرف بإسم نظام الملك وأصبح وزيرا فى بلاط الملك ملكشاه، وأنهما إتفقا على أن من يحصل منهما على منصب عال يساعد الاخر .

لكن هذه القصة لا تدعمها تواريخ حياة الرجلين فمعظم الباحثين يتفقون على أن الخيام مات عام ١١٣١ ، بحيث أنه لو كان زميلا فى الدراسة

حقا لنظام الملك فلابد أن عمره كان ١٥٠ سنة عندما مات ، وهو أمر غير مرجح بالمرة .

ونحن نعرف أنه في عام ١٠٧٠ م عندما كتب كتابه العظيم في الجبر كان يدعمه في هذا العمل قاضي قضاة سمرقند ابو طاهر . وفي هذا الكتاب درس الخيام بشكل منهجي كل أنواع معادلات الدرجة الثالثه وإستخدم القطاعات المخروطية لإيجاد جذور هذه المعادلات كأطوال قطع مستقيمة هي مساقط لنقط تقاطع هذه المنحنيات (سنشرح ذلك فيما بعد) .

وهناك قرائن على أن الخيام حاول أن يحصل على صيغة جبرية لتلك الجذور ولم ينجح ، ولذا كتب في كتابه (الجبر) .

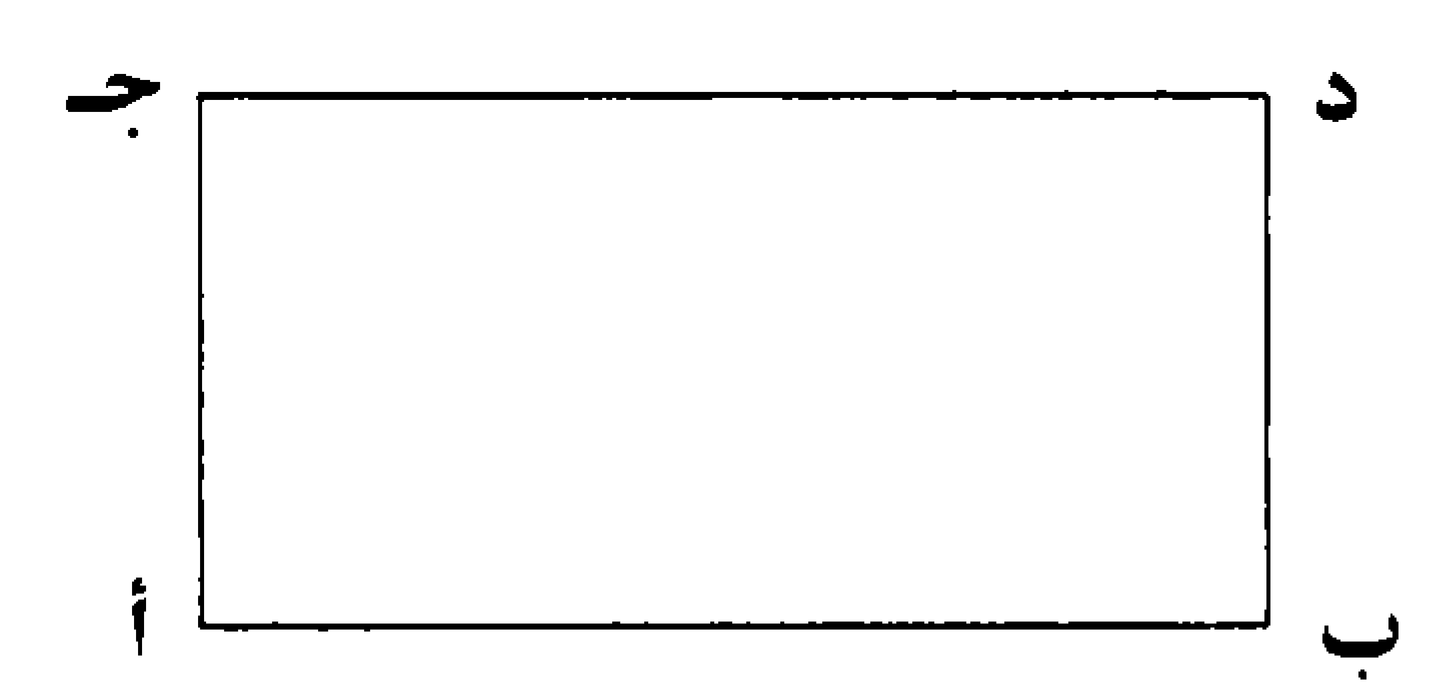
" لقد حاولت التعبير عن هذه الجذور بالجبر لكنني لم أنجح ، وربما ينجح في ذلك رجال يأتون بعدنا "

وعظمة هذه الفقرة الأخيرة تتمثل في إعترافها بإستمرارية تقاليد البحث العلمي حتى بعد موت الباحث وهي بذلك تكشف عن رجل متواضع واسع الأفق ومتحضر .

وخلال الفترة ١٠٧٠ - ١٠٨٠ ذهب الخيام إلى أصفهان حيث أقام بها لمدة ١٨ عاما وذلك بدعم من حاكمها ملكشاه ووزيره نظام الدين حيث أشرف على برنامج للبحوث الفلكية في مرصد بناه له ملكشاه . وبسبب هذا إستطاع أن يقدم خطة لإصلاح التقويم الذى كان قائما آنذاك ، وتتمثل خطة الخيام في جعل ثمان سنوات (من ٣٣ سنة) كبيسة أ ى أن طولها ٣٦٦ يوم .

وبذلك أنتج الخيام طولا للسنة أقرب للحقيقة من الرقم الذى نستخدمه اليوم لطول السنة فى التقويم الجريجورى .

ومن أعمال الخيام الهامة بحثه " تفسير لمصادرات إقليدس " وهو عمل كتب ١٠٧٧ م أى قبل تقديم إصلاحه التقويمى بعامين . وفى هذا البحث يعالج الخيام قضيتين شديدتى الأهمية فى أسس الهندسة ... إحداهما التى عالجها ثابت بن قرة وإبن الهيثم وتتعلق بالمصادرة الخامسة أى مصادرة التوازى .



إن الخيام يؤسس تحليله على الشكل الرباعى أ ب جـ د حيث جـ أ ، د ب متساويان وكل منهما عمودى على أ ب . وهو يدرك أنه لكى يوضح أن مسلمة التوازى تستنتج من المسلمات الأربعة الأخرى فيكفى برهان أن الزوايا الداخلة عنه جـ ، د هى زوايا قائمة،
الأمر الذى يؤدى إلى وجود مستطيل .

أما المسألة الأخرى التى عالجها الخيام فى مناقشته لمشاكل مصادرات إقليدس فهى مسألة النسب . هنا نجد إنجازات الخيام من ناحيتين: إحداهما إثبات أن تعريف النسبة كما فصلت فى الرياضيات الإسلامية يتكافئ مع تعريف إقليدس .

والآخر إقتراحه أن مفهوم العدد فى حاجة إلى توسيع ليتضمن نوعا جديدا من الأعداد وهو النسب . فمثلا فى رأى الخيام أن النسبه بين طول قطر المربع وضلعه ($\sqrt{٢}$) أو نسبة طول محيط الدائرة إلى قطرها (ط) يجب أن ينظر إليها كأعداد جديدة .

إن هذه الفكرة العامة فى الرياضيات ترقى إلى فكرة تقديم فضاء الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث يشمل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية، ومثل مصادرة التوازى فقد نقلها نصير الدين الطوسى فى كتابه إلى الرياضيين الأوربيين .

. . . .

قال الخيام لأحد أصدقائه أنه يريد عندما يموت أن يدفن فى أصفهان حيث تهب الريح برائحة الورد فوق قبره . وقد تحققت رغبته فى مقبرة الرياضى العبقرى الفذ هناك ، وهى قائمة حتى اليوم .

(٨)

<u>من أعمال الخيام الرياضية :</u> حل معادلات الدرجة الثالثة بيانيا

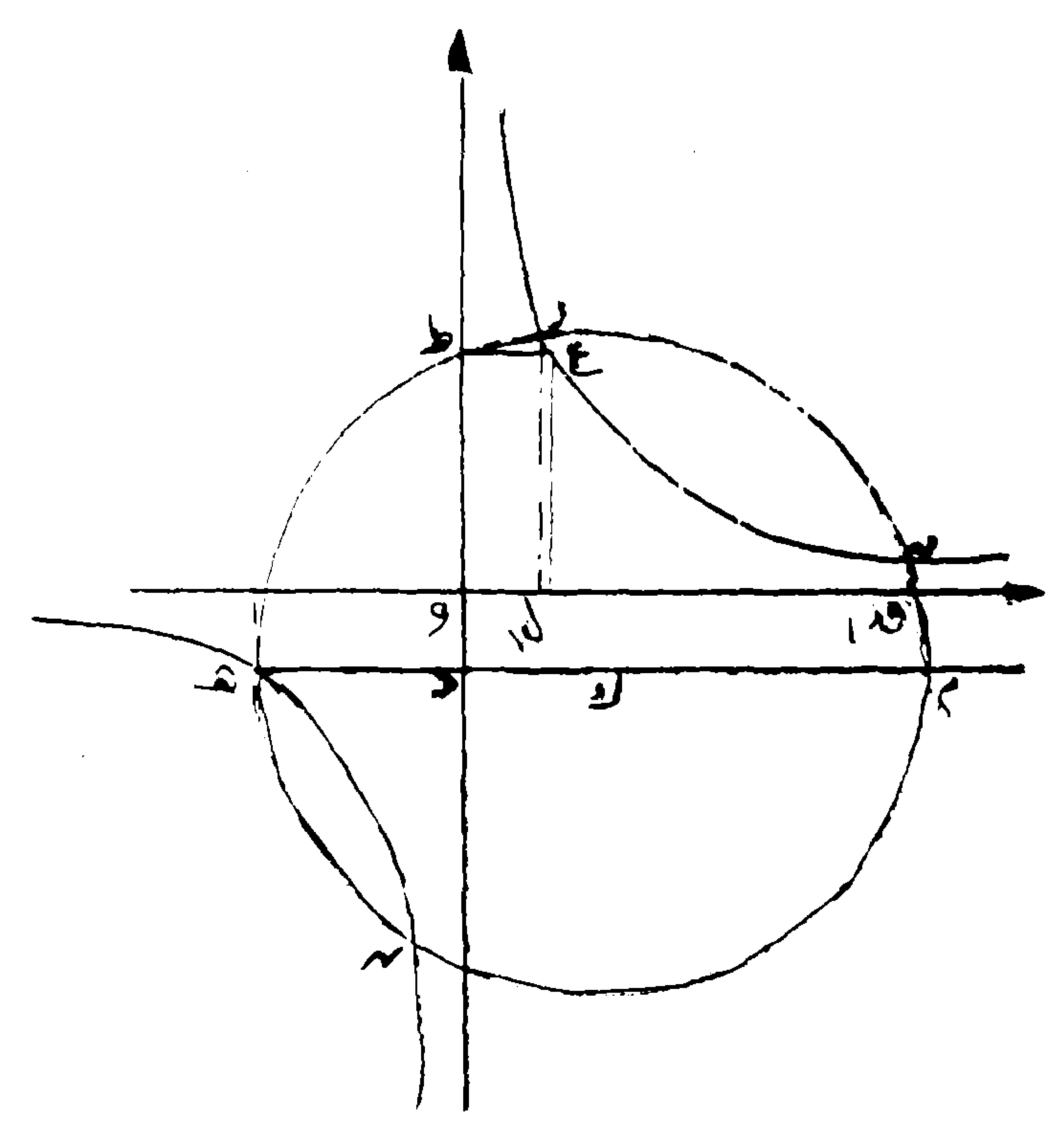
قام الخيام بتطبيق معادلات الدرجة الثالثة كما فعل الخوارزمى فى معادلات الدرجة الثانية وفق موقع معاملات قوى المجهول س ، ومن ثم إختيار القطعين الملائمين للمعادلة . فمثلا فى المعادلة

$$س^{٣} + ب^{٢} س + أ^{٣} = جـ س^{٢} \qquad (١)$$

يلجأ إلى إستخدام تقاطع الدائرة مع القطع الزائد ، ويستخدم الهندسة فى البرهان على طريقة إقليدس على النحو التالى:

(١) نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقى والآخر رأسى يتقاطعان فى نقطة و . ونأخذ دو = ب ، هـ د = $\frac{أ^{٣}}{ب^{٢}}$ ، دم = جـ

(٢) نرسم دائرة قطرها هـ م ومركزها ك



(٣) من خواص الدائرة نجد أن $\overline{ط د}^{٢} = د هـ \times م د = \frac{ا^{٣}}{ب^{٢}} \times جـ$

$$\overline{ط د} = \frac{ا}{ب}\sqrt{ا جـ}$$

(٤) نرسم ط ع موازيا للمحور الأفقى بحيث أن

$\overline{ع ط} \times ط و$

$= هـ د \times د و$

$$= \frac{ا^{٣}}{ب^{٢}} \times ب = \frac{ا^{٣}}{ب}$$

(٥) نرسم قطعا زائدا معادلة س ص = $\frac{أ^{٣}}{ب}$ وتقاربيا ه المحورين الأفقى والرأسى. من الواضح أن هذا القطع الزائد يمر بالنقطتين ع ، هـ (بسبب تساوى المستطيلين حيث أن مساحة كل منهما $\frac{أ^{٣}}{ب}$ ، أى أن إحداثيات النقطة ع ، وإحداثيات النقطة هـ تحققان س ص = $\frac{أ^{٣}}{ب}$.)

(٦) نسقط من نقطتى تقاطع الدائرة والقطع الزائد ل ، ق عمودين على المحور الأفقى فيقابلاه فى $ق_{١}$ ، $ل_{١}$ على التوالى ، وسنبرهن أن و $ل_{١}$ ، و $ق_{١}$ هما حلان للمعادلة (١)

إذن الحلول الموجبة لمعادلة (١) هما و$ل_{١}$ ، و $ق_{١}$

وهذا ما نعنيه بالحلول البيانية

البرهان : إن إحداثيات مركز الدائرة هى [$\frac{١}{٢}$(جـ − $\frac{أ^{٣}}{ب^{٢}}$) ، − ب]

لأن قطر الدائرة هو د هـ + د م = جـ + $\frac{أ^{٣}}{ب^{٢}}$

ك د = م د − م ك = جـ − $\frac{١}{٢}$ (جـ + $\frac{أ^{٣}}{ب^{٢}}$)

$$= \frac{1}{2}\left(\text{جـ} - \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right) \text{ د و} = \text{ب}$$

ونصف قطر الدائرة هو $\frac{1}{2}\left(\text{جـ} + \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right)$

إذن معادلة الدائرة هى

$$\left[\text{س} - \frac{1}{2}\left(\text{جـ} - \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right)\right]^2 + \left[\text{ص} + \text{ب}\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\text{جـ} + \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right)^2$$

وبالفعل يمكن تبسيط هذه المعادلة إلى

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س}\left(\text{جـ} - \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right) + 2\text{ب ص} + \text{ب}^2 - \text{جـ}\frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2} = \text{صفر}$$

إذن لإيجاد نقط التقاطع بين الدائرة والقطع الزائدة
نعوض فى معادلة الدائرة عن معادلة القطع الزائد أى

$$\text{س}^2 + \left(\frac{\text{أ}^3}{\text{س ب}}\right)^2 - \text{س}\left(\text{جـ} - \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right) + 2\text{ب}\left(\frac{\text{أ}^3}{\text{ب س}}\right)$$

$$+ \text{ب}^2 - \text{جـ}\frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2} = \text{صفر}$$

أى

$$\text{س}^4 - \left(\text{جـ} - \frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right)\text{س}^3 + \left(\text{ب}^2 - \text{جـ}\frac{\text{أ}^3}{\text{ب}^2}\right)\text{س}^2 - 2\text{أ}^3\text{ س}$$

$$+ \frac{أ^٦}{ب^٢} = صفر$$

وحيث أن النقطة هـ هى نقطة تقاطع وإحداثياتها هى ($-\frac{أ^٣}{ب^٢}$ ، – ب) ، فلابد أن تكون س + $\frac{أ^٣}{ب^٢}$ هو عامل تحليل فى المعادلة السابقة ، والتى يمكن كتابتها على النحو التالى :

$$(س + \frac{أ^٣}{ب^٢}) (س^٣ - جـ س^٢ + ب^٢ س + أ^٣) = صفر$$

وإذن نقط التقاطع الثلاث الأخرى (غير هـ) تحقق المعادلة .

$$س^٣ - جـ س^٢ + ب^٢ س + أ^٣ = صفر \quad أو$$

$$س^٣ + ب^٢ س + أ^٣ = جـ س^٢$$

وهذه المعادلة هى (١) الأصلية

نلاحظ أخيرا أن الخيام تجاهل الجذر السالب الذى تمثله النقطة هـ

<u>حول معادلات الدرجة الرابعة :</u>

فى الحقيقة يمكن إستخدام طريقة الخيام لحل معادلات الدرجة الرابعة كما يلى:

إعتبر المعادلة

$$س^٤ + أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د = صفر \qquad (٢)$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية

سوف نلاحظ أن إشارة د ستحدد ما إذا كانت الحلول تأتى نتيجة تقاطع قطعين زائدين قائمين أو تقاطع دائرة مع قطع زائد. إذ بقسمة طرفى المعادلة (٢) على $س^{٢}$ نجد

$$س^{٢} + أ\,س + ب + \frac{جـ}{س} + \frac{د}{س^{٢}} = صفر$$

وإذا عوضنا عن $س^{-١}$ بمضاعف للمتغير ص نجد أن الحد الأخير يصبح $+ص^{٢}$ او $-ص^{٢}$ حسب إشارة د .

فإذا كانت د موجبة نأخذ $ص = \frac{\sqrt{د}}{س}$ أى $\frac{د}{س^{٢}} = ص^{٢}$

وفى هذه الحالة نجد حالة تقاطع دائرة مع قطع زائد

وإذا كانت د سالبة نأخذ $ص = \frac{\sqrt{-د}}{س}$ ، وفى هذه الحالة $\frac{د}{س^{٢}} = -ص^{٢}$

وفى هذه الحالة نأخذ تقاطع قطعين زائدين

<u>الحالة الأولى :</u> د > ٠

ضع $د = هـ^{٢}$ وأقسم المعادلة على $س^{٢}$

$$س^{٢} + أ\,س + ب + جـ\,س^{-١} + هـ^{٢}\,س^{-٢} = ٠$$

ضع $ص = هـ\,س^{-١}$ أى $س\,ص = هـ$ نحصل على

$$س^{٢} + أ\,س + ب + \frac{جـ}{هـ}\,ص + ص^{٢} = ٠$$

أى $$\left(\text{س} + \frac{\text{أ}}{٢}\right)^{٢} + \left(\text{ص} + \frac{\text{جـ}}{٢\text{هـ}}\right)^{٢} = \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{جـ}^{٢}}{٤\text{هـ}^{٢}} - \text{ب}$$

وهذه دائرة بشرط أن $\frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{جـ}^{٢}}{٤\text{هـ}^{٢}} - \text{ب} > ٠$

وفى هذه الحالة فالجذور الحقيقية للمعادلة من الدرجة الرابعة .

$$\text{س}^{٢} + \text{أ}\,\text{س}^{٣} + \text{ب}\,\text{س}^{٢} + \text{جـ}\,\text{س} + \text{د} = ٠$$

هى تنتج من تقاطع الدائرة $\left(\text{س} + \frac{\text{أ}}{٢}\right)^{٢} + \left(\text{ص} + \frac{\text{جـ}}{٢\text{هـ}}\right)^{٢} = \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{جـ}^{٢}}{٤\text{هـ}^{٢}} - \text{ب}$

مع القطع الزائد $\text{س}\,\text{ص} = \sqrt{\text{د}} = \text{هـ}$

<u>مثال :</u> إعتبر المعادلة

$$\text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٣} - ١٣\,\text{س}^{٢} - ١٤\,\text{س} + ٢٤ = ٠$$

أ = ٢ ، ب = −١٣ ، جـ = −١٤ ، د = ٢٤ ، بالتالى $\text{هـ} = \sqrt{\text{د}} = ٢\sqrt{٦}$

$$\frac{\text{أ}^{٢}}{٤} + \frac{\text{جـ}^{٢}}{٤\text{هـ}^{٢}} - \text{ب} = ١ + \frac{١٩٦}{٩٦} + ١٣$$

$$= \frac{٩٦ + ١٩٦ + ١٣ \times ٩٦}{٩٦} = \frac{٢٤ + ٤٩ + ٢٤ \times ١٣}{٢٤}$$

$$= \frac{٢٤ + ٤٩ + ٣١٢}{٢٤} = \frac{٣٨٥}{٢٤} > ٠$$

إذن حل المعادلة من الدرجة الرابعة السابق ذكرها هى

ثمرة تقاطع الدائرة

$$(س + ١)^٢ + (ص - \frac{٧\sqrt{٦}}{١٢})^٢ = \frac{٣٨٥}{٢٤}$$

مع القطع الزائد $س ص = ٢\sqrt{٦}$

وبرسم الشكل يمكن أن نتحقق أن مساقط نقط التقاطع ، أى الجذور

هى $-٤ ، -٢ ، ١ ، ٣$.

أما إذا كانت $\frac{أ^٢}{٤} + \frac{جـ^٢}{٤هـ^٢} - ب < ٠$ فإن ما سلف لا يكون

دائرة ، ولن تكون هناك جذور حقيقية ، وإذا كانت

$ب = \frac{أ^٢}{٤} + \frac{جـ^٢}{٤هـ^٢}$ فإن الدائرة تتحول إلى نقطة ولا تكون هناك

جذور حقيقية .

<u>الحالة الثانية :</u> إذا كان $د < ٠$ نضع $د = -هـ^٢$

وإذن

$$س^٤ + أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س - هـ^٢ = ٠$$

بالقسمة على $س^٢$ نحصل على

$$س^٢ + أ س + ب + جـ س^{-١} - هـ^٢ س^{-٢} = ٠$$

وبوضع $ص = هـ س^{-١}$ نجد أن

$$س^{٢} + أس + ب + \frac{جـ}{هـ}ص - ص^{٢} = ٠$$

أو $(س + \frac{أ}{٢})^{٢} - (ص - \frac{جـ}{٢هـ})^{٢} = \frac{أ^{٢}}{٤} - \frac{جـ^{٢}}{٤هـ^{٢}} - ب$

فإذا كانت $\frac{أ^{٢}}{٤} - \frac{جـ^{٢}}{٤هـ^{٢}} - ب > ٠$

فإن الحلول تكون ثمرة تقاطع القطع الزائد القائم

$$(س + \frac{أ}{٢})^{٢} - (ص - \frac{جـ}{٢هـ})^{٢} = \frac{أ^{٢}}{٤} - \frac{جـ^{٢}}{٤هـ^{٢}} - ب$$

مع القطع الزائد

$$س ص = هـ$$

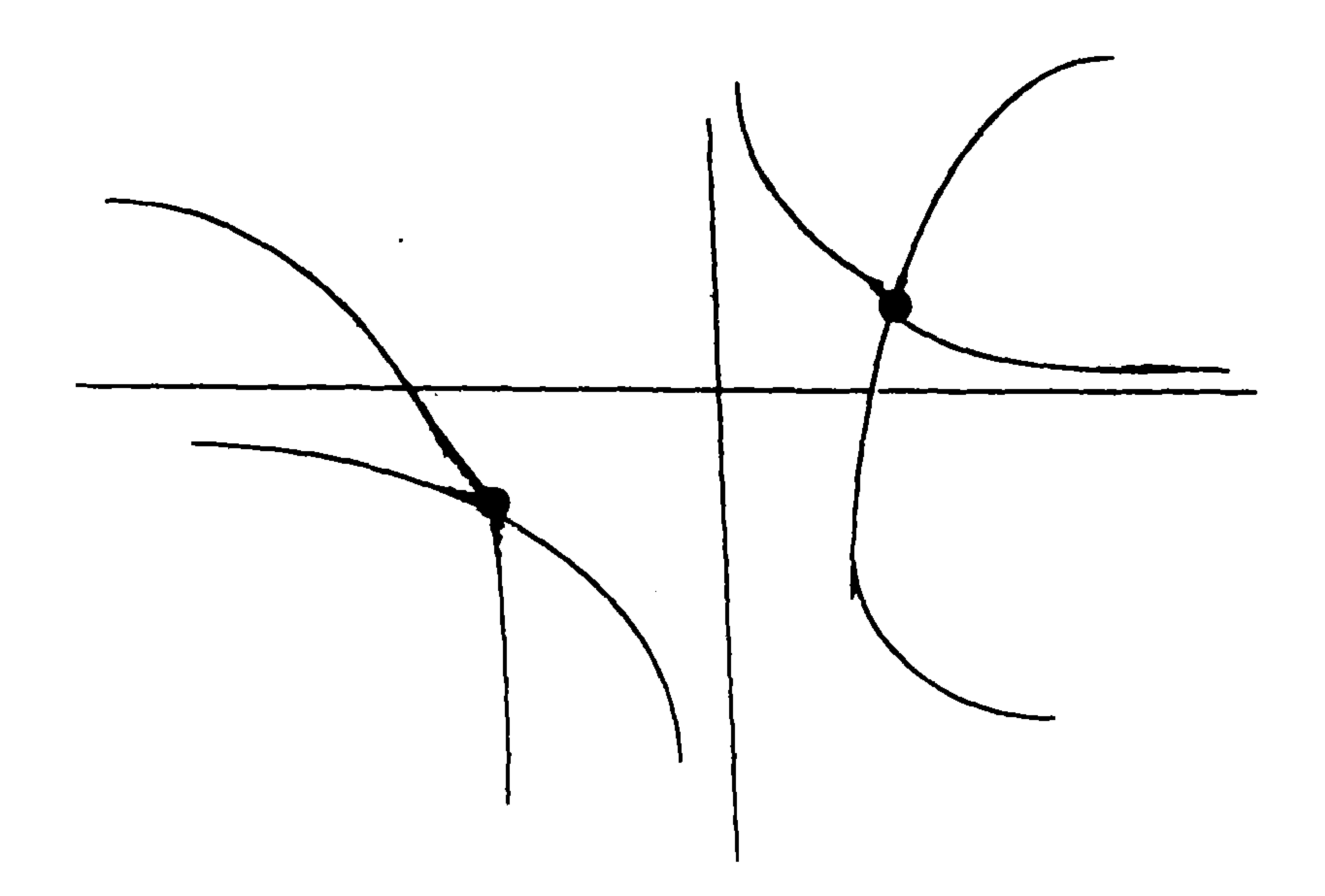
<u>مثال</u>: إدرس المعادلة $س^{٤} + ٣س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ٤ = ٠$

أ = + ٣ ، ب = -٣ ، جـ = ٣ ، د = - ٤ أى هـ = ٢

$$\frac{أ^{٢}}{٤} - \frac{جـ^{٢}}{٤هـ^{٢}} - ب = \frac{٩}{٤} - \frac{٩}{١٦} + ٣ = \frac{٧٥}{١٦}$$

الحل يكون تقاطع القطع الزائد $(س + \frac{٣}{٢})^{٢} - (ص - \frac{٣}{٤})^{٢} = \frac{٧٥}{١٦}$

على القطع $س ص = ٢$



أما إذا كان $\frac{أ^2}{4} - \frac{جـ^2}{4هـ^2} - ب < 0$

فإن معادلة القطع الزائد تتحول إلى

$$(ص - \frac{جـ}{2هـ})^2 - (س + \frac{أ}{2})^2 = ب - \frac{أ^2}{4} + \frac{جـ^2}{4هـ^2}$$

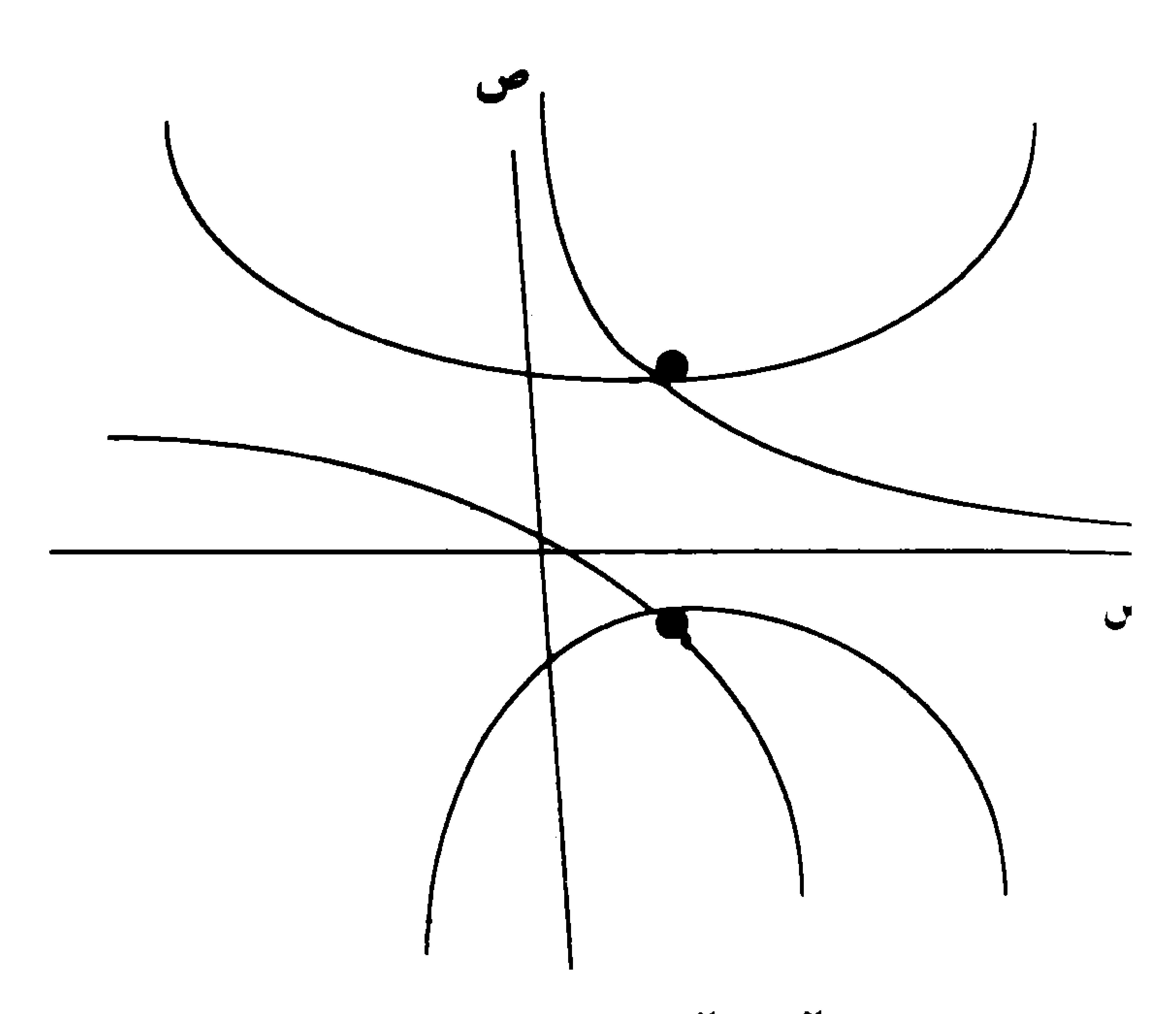
وتقاطعه مع القطع س ص = هـ هو الحل

<u>مثال</u>: $س^4 + 4 س^3 + 5 س^2 + س - 1 = 0$

هنا نجد $\frac{أ^2}{4} - \frac{جـ^2}{4هـ^2} - ب = - \frac{5}{4}$

والحلول هي ثمرة تقاطع $(ص - \frac{1}{2})^2 - (س + 2)^2 = \frac{5}{4}$

مع س ص = ١



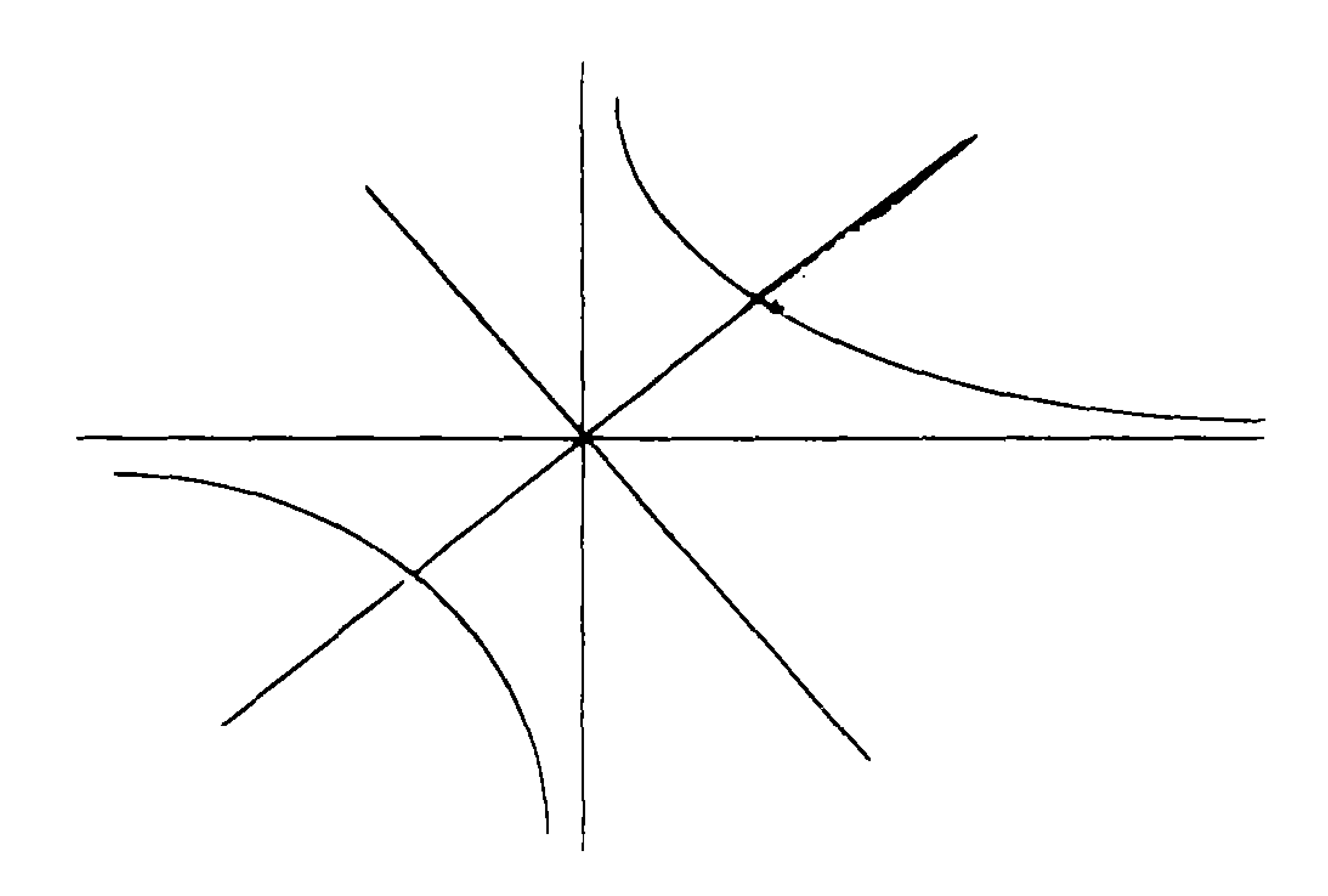
أما إذا كانت $\frac{أ^{٢}}{٤} - \frac{جـ^{٢}}{٤\ هـ^{٢}} - ب = ٠$

فإن الحل يأتي من تقاطع المستقيمين $ص - \frac{جـ}{٢\ هـ} = س + \frac{أ}{٢}$ ، ص -

$- \frac{جـ}{٢\ هـ} = - \left(س + \frac{آ}{٢} \right)$

على القطع الزائد س ص = هـ

مثال : حل المعادلة $س^{4} - 1 = 0$ الحلـول هـى نتيجـة تقـاطع المستقيمين ص = س ، ص = − س مع القطع الزائد س ص = ١



تبسيط طريقة الخيام : يمكن تبسيط طريقة الخيام فى الحلول لمعادلات الدرجة الثالثة بدراسة المعادلة

$س^{3} + أ س = ب$ (١) أ > ٠ ، ب > ٠

وذلك بالتخلص من الحد الذى يحتوى على $س^{2}$. ويمكن دائما عمل ذلك بتعويض مناسب . فمثلا المعادلة

$س^{3} + أ س^{2} + ب س = جـ$ يمكن تحويلها إلى الصورة (١) بالتعويض

$$ص = س + \frac{أ}{3}$$

أو $س = ص - \frac{أ}{٣}$

$$\left(ص - \frac{أ}{٣}\right)^{٣} + أ\left(ص - \frac{أ}{٣}\right)^{٢} + ب\left(ص - \frac{أ}{٣}\right) = جـ$$

معامل $ص^{٢}$ هو $- ٣ \times \frac{أ}{٣} + أ = ٠$

وتصبح المعادلة فى ص من النوع

$$ص^{٣} + أ\,ص + ب = ٠$$

لننظر إذن إلى المعادلة (١)

الطريقة المتبعة لحل (١) هى تقاطع الدائرة

$$\left(س - \frac{ب}{٢\,أ}\right)^{٢} + ص^{٢} = \left(\frac{ب}{٢\,أ}\right)^{٢}$$

مع القطع المكافئ $س^{٢} = \sqrt{أ}\ ص$

نقط التقاطع هى $\left(س - \frac{ب}{٢\,أ}\right)^{٢} + \frac{س^{٤}}{أ} = \left(\frac{ب}{٢\,أ}\right)^{٢}$

$$س^{٢} - \frac{ب}{أ}س + \frac{س^{٤}}{أ} = ٠$$

$$\frac{س}{أ}\left(س^{٣} + أ\,س - ب\right) = ٠$$

أى $س^{٣} + أ\,س = ب$

<u>مثـال :</u> حل المعادلة $س^{٣} + ٤\,س = ١٦$

وبالمثل فى حالة المعادلة $س^{٣} = أ\,س + ب$ $أ ، ب > ٠$

نعود إلى تقاطع القطع المكافئ $س^{٢} = \sqrt{أ}\,ص$

مع القِطع الزائد $س\left(\frac{ب}{أ} + س\right) = ص^{٢}$ أى $س^{٢} - ص^{٢} + \frac{ب}{أ}\,س = ٠$

عند التقاطع نجد أن $س^{٢} + س\,\frac{ب}{أ} = \frac{س^{٤}}{أ}$ أى

$$\frac{س^{٣}}{أ} = س + \frac{ب}{أ}$$ أى $س^{٣} = أ\,س + ب$

وبالمثل فإن الطريقة المتبعة فى حالة

$$س^{٣} + ب = أ\,س$$

هو تقاطع القطع المكافئ $س^{٢} = \sqrt{أ}\,ص$

مع القطع الزائد $ص^{٢} - س^{٢} + \frac{ب}{أ}\,س = ٠$

(٩)، (١٠)

إبـن الهيثــم :

لم ينل عالم عربى فى مسيرة التاريخ ما ناله ابن الهيثم من تقدير لنبوغه العلمى والهندسى وإذا كان العالم مازال يذكر حتى اليوم فخر بحوثه أى كتابه (المناظر) فى علم البصريات إلا أن إبن الهيثم كان رياضيا مبدعا ومهندسا كبيرا بمقاييس عصره . فهو أول من أشار إلى فكرة تخزين مياه النيل عند أسوان للإنتفاع بها فى مواسم الجفاف .

حدث هذا بينما كان الحاكم بأمر لله يحكم مصر (الدول الفاطمية) ، فقد سمع الحاكم بأمر إبن الهيثم وعلو مقامه فى العراق وانه قال " لو كنت بمصر لعملت فى نيلها عملا يحصل به النفع فى كل حاله من حالاته من زيادة ونقصان . منذ بلغنى أنه ينحدر من مكان عال وهو فى طرف الإقليم المصرى " فأرسل إليه الحاكم بأمر لله أموالا وهدايا وناشده الحضور إلى مصر . فلما جاء إبن الهيثم خرج الحاكم بأمر لله لاستقباله خارج القاهرة والتقى به عند قرية قرب أحد أبواب القاهرة مرحبا وأكرم وفادته .

وإنتظر الحاكم أياما حتى إستراح إبن الهيثم من عناء السفر ثم طالبه بما قاله فى أمر النيل . وسار إبن الهيثم ومعه جماعة من الصناع المتولين للعماره بأيديهم – وكانه على رأس بعثة هندسية بأدق المعانى الحديثه لهذه الكلمة – يتتبع مجرى النيل من القاهرة

إلى جنوب أسوان حتى وصل إلى مكان يقال له الجنادل (الشلال) ولم يجد إبن الهيثم - كما بلغه من قبل - موضعا عاليا ينحدر منه فعاينه وإختبره من جوانبه ، وفكر وقدر ، فلم يجد الأمر متفقا مع الفكرة الهندسية التى خطرت له فعاد إلى القاهرة خجلا وإعتذر للحاكم .

وقبل الحاكم إعتذاره وإقتنع بما أبدى من أسباب ، بل ولاه منصبا من مناصب الدولة . لكن إبن الهيثم كان كارها لأعمال الدووايين ، ميالا إلى الإنقطاع إلى البحث العلمى وإجراء التجارب وتأليف الكتب ، ففكر فى حيلة يتخلص بها من المنصب دون أن يجلب على نفسه غضب الحاكم ، فلم يجد وسيلة غير أن يتظاهر بالجنون وخبال العقل . وأشاع ذلك عن نفسه حتى بلغ الحاكم فعزله عن منصبه وصادر أمواله وعين عليه من يقوم بخدمته .

وظل إبن الهيثم فى هذا الوضع المأساوى حتى مات الحاكم بأمر الله . فلما تيقن من الخبر إستوطن غرفة بجوار الجامع الأزهر وعاد إلى البحث العلمى وإنقطع له ، ولبث بعد ذلك حيا أكثر من ثمانية عشر عاما أصدر خلالها كتابه " المناظر" أكبر أعماله العلمية وأجلها شأنا .

. . .

إن من المتفق عليه اليوم بين مؤرخى العالم فى الغرب أن أوربا القرون الوسطى قد شقت طريقها إلى عصرالنهضة (القرن

السادس عشر) من خلال التراجم العربية للتراث العلمى والفلسفى اليونانى التى كانت موجودة بالأندلس وصقلية وغيرهما ، ومن خلال الكتب والمؤلفات العربية التى ترجمها الأوربيون إبان الحروب الصليبية (القرنان الحادى عشر والثانى عشر الميلادى) ، إلا أن هؤلاء المؤرخين يتفاوتون حول قيمة الإبتكار و الأصالة فى تراث الحضارة العربية الإسلامية . ورغم ذلك فهم جميعا وبدون إستثناء يتفقون على أن إبن الهيثم كان عالما عربيا أصيلا ويكفى أن نشير إلى ما قاله العالم البريطانى برونفسكى فى كتابه " إرتقاء الإنسان " عند تعرضه لحركة الترجمة الأوربية للتراث اليونانى فى الأندلس.

" إن أشهر المترجمين وأنبغهم كان جيرار دى كريمونا الذى جاء من إيطاليا خصيصا للبحث عن نسخة من كتاب بطليموس فى الفلك (المجسطى) والذى أقام فى طليطلة لترجمة أرشميدس وهيبوقريطس وجالينوس وإقليدس - عمالقة العلم اليونانى . ومع ذلك ففى رأيى أن أروع الرجال الذين ترجمت أعمالهم وأشدهم نفوذا فى المدى الطويل - لم يكن يونانيا . ومصدر حكمى هذا أننى مهتم بتصوير الأجسام فى الفراغ ، وهو موضوع كان اليونانيون فيه على خطأ بين . لقد فهم هذا الموضوع لأول مره حوالى ١٠٠٠ م على يد رياضى عربى غريب الأطوار يدعى إبن الهيثم . وهو وحده العقل العربى الأصيل الذى أنجبته الثقافة العربية " .

" لقد ظن اليونانيون أن الضوء ينطلق من العين إلى الأجسام ولكن إبن الهيثم أدرك لأول مره أننا نرى الجسم لأن كل نقطة عليه ترسل شعاعا إلى العين وتعكسه منها"

" إن التصور اليونانى لم يكن قادرا على تفسير كيف أن جسما - يدى مثلا- يبدو وقد تغير حجمه عندما يتحرك . أما فى تفسير إبن الهيثم فهذا أمر واضح، إذ أن مخروط الأشعة الذى يصدر عن إطار يدى وشكلها يأخذ فى الصغر كلما تحركت يدى بعيدا عنك . وكلما إقتربت يدى منك أخذ مخروط الأشعة الذى يدخل عينيك فى الكبر وكانت زاوية راسه أكبر .

" إن هذا - وهذا فقط - هو الذى يفسر تغير حجم اليد - بالنسبة للمشاهد - عند الحركة . إن فكرة إبن الهيثم من البساطة بحيث يبدو مدهشا أن العلماء لم ينتبهوا لها إلا بعد ستمائة عام من نشره لها . أما الفنانون فقد تعاملوا مع هذه الفكرة بطريقة عملية ، قبل العلماء بزمن طويل . إن مفهوم مخروط الأشعة الصادر عن الجسم إلى العين هو أساس فكر ة " المنظور " ، والمنظور هو الفكرة الجديدة التى منحت الرياضيات حيوية جديدة " .

أما برنال فى كتابه " العلم فى التاريخ " فهو يؤكد على الأهمية الفسيولوجية للوصف الدقيق الذى قدمه إبن الهيثم لتركيب العين ، فى مناطق شديدة الحرارة كثرت فيها أمراض العيون .

وفى كتاب ألدو ميلى " العلم عند العرب " فهو يقول إن إبن الهيثم تجاوز ببعيد - بكتابه المناظر ، أهمية جميع الفيزيائيين العرب الآخرين ، بل كان باعثا إلى البحوث والأعمال التى قام بها كل من روجر بيكون ووايتلو .

ولقد أدت دراسات إبن الهيثم فى ظواهر إنعكاسات الضوء وإنكساراته إلى حل العديد من المعضلات الرياضية ومنها المشكلة المعروفة بإسمه وتتلخص كما يلى :

" إفرض دائرة مركزها و ، وإفرض نقطتين خارجتين عن الدائرة المطلوب إيجاد نقطة أ على محيط هذه الدائرة بحيث يكون المستقيمان اللذان يربطان هذه النقطة أ بالنقتطين الخارجتين زوايا متساوية مع نصف قطر الدائرة أ و . لقد إحتوى حل هذه المشكلة على معادلة من الدرجة الرابعة حلها إبن الهيثم بواسطة نقط تقاطع دائرة وقطع زائد .

جمشيد الكاشى :

من أسماء التفخيم التى أطلقت على بعض الرياضيين أو الفلكيين الإسلاميين إسم (الحاسب) فمثلا كان من النشيطين فى علم الجبر زمن وفاة ثابت بن قره حوالى ٣٩٠ أبو كامل (من مصر) وكان معروفا بإسم (الحاسب المصرى) وقد ألف أبو كامل كتابا فى الجبر هو بمثابة تعليق على كتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة) ، وقد أصبح

كتابه هذا مرغوبا جدا حتى أن باحثا مثل الكرجى فى أواخر القرن العاشر والأيطالى ليوناردى بيزا (المعروف بإسم (فيبوناتشى) فى أواخر القرن الثانى عشر) قد إستخدما بكثرة الأمثلة الوآردة فى كتاب أبو كامل فى الجبر .

ومع ذلك فالغريب أن الرجل الذى كان أكثر إستحقاقا لهذا اللقب (الحاسب) لم يحصل عليه فيما يبدو . ذلك هو - غياث الدين جمشيد الكاشى .

ولد الكاشى فى النصف الثانى من القرن الرابع عشر بمدينة كاشان التى تبعد عن أصفهان (مدينة الخيام) بنحو ٩٠ ميل . لكننا لا نعرف شيئا عن حياته حتى عام ١٤٠٦ م ، عندما بدأ - كما يقول هو - سلسلة من المشاهدات للخسوف القمرى فى كاشان . وفى العام التالى كتب بحثا عن أبعاد الكون وأهداه إلى أمير مغمور . وبعد ذلك بسبع سنوات فى عام ١٤١٤ إنتهى من مراجعة الجداول الفلكية العظيمة التى وضعها نصير الدين الطوسى قبل ذلك بنحو ١٥٠ عاما . وأهدى هذه المراجعة إلى الخان العظيم (خاقان) أولوج بك حفيد تيمورلنك وكانت عاصمته سمرقند . وفى مقدمة هذه الجداول يتحدث الكاشى عن فقره الذى عاناه وكيف أن كرم أولوج بك هو الذى أعانه على أن يكمل هذا العمل .

وقد إنضم الكاشي إلى حاشية أولوج بك في سمر قند ، وخلال عام ١٤١٧ بدأ أولوج بك بناء مدرسة هناك ما زالت بقاياها موجودة حتى اليوم ، وبعد الإنتهاء من بناء المدرسة بدأ بناء مرصد .

وخلال تلك الفترة في سمرقند جاءت أعظم إنجازات الكاشي ، ومنها حسابه المدهش لقيمة طـ صحيحة لستة عشر رقم عشري . ولكي يصل الكاشي إلى هذه الدرجة من الدقة بطريقة الإستغراق التي إستعملها أرشميدس كان عليه إستخدام مضلعات منتظمة داخلية وخارجية (لدائرة معلومة) وصل عدد أضلاعها إلى نحو ٤٠٠ ضلع .

ومما يجعل هذا الإنجاز لافتا للنظر أن الكاشي يذكر مقدما أي درجة من الدقة يريد ثم يخطط في عناية مدى دقة كل مرحلة من الحساب بحيث لا تتراكم أخطاء التقريب .

وعلى الرغم من أن هذا الدراسة لـ طـ لا تحتوي على إهداء لأحد إلا أن العمل الذي إستكمل بعد ذلك بسنتين - وهو مجمع للحساب والجبر والقياس ويسمي (مفتاح الحاسب) - مهدى إلى أولوج بك . ومن إنجازات هذا الكتاب الفريدة العرض المنهجي لحساب الكسور العشرية ، وهو إختراع ينسبه الكاشي لنفسه وهو إدعاء غير صحيح لأننا نعلم من كتاب أبو الحسن الإقليديسي (فصول في الحساب الهندي) عام ٩٥٣ م أنه إستخدم الكسور العشرية في هذا الكتاب ، كما أنه ذكر في كتابه هذا أنه إستخدم أفضل الطرق

الموجودة فى كتب من سبقوه فى عرض مادة كتابه . لذا من الصعب القول أن أبا الحسن الإقليديسى هو مكتشف الكسور العشرية ، ولكن عدم وجود الكسور العشرية فى المصادر الهندية يؤكد أنه أكتشاف إسلامى .

ومن إنجازات الكاشى أيضا فى كتابه (مفتاح الحاسب) طريقته البديعة لحساب الجذر الخامس لأى عدد . ولقد بلغ من روعة هذا الكتاب أنه ظل فى المدارس الفارسية حتى القرن السابع عشر ككتاب مدرسى . ومن المثير أن نعرف أن نسخة من هذا الكتاب موجودة فى المتحف البريطانى وأخيرا من المسائل التى يذكرها الكاشى فى كتابه (مفتاح الحاسب) هى تلك المتعلقة بحل معادلة من الدرجة الثالثة (بالطريقة البيانية) وذلك لحساب جا ١°

ولقد مات الكاشى فى عام ١٤٢٩ م فى المرصد الذى ساعد على بناءه . وفى مقدمة جداوله الفلكية المكتوبة بعد وفاته بثمان سنوات يشير أولوج بك إلى الكاشى بإعتباره (الملا المحبوب المعروف بين مشاهير العالم الذى سيطروا على علوم القدماء وأكملوها والذين يستطيعون حل أعقد المشاكل) .

طريقة الكاشى فى حساب الجذر التربيعى

سوف نشرح هنا طريقة الكاشى فى حساب الجذر التربيعى للعدد ٣٣١٧٨١

(١) يقسم الكاشي العدد إلى مجموعات ثنائية (يسميها دورات) بادئا من اليمين ويصبح ٨١ ١٧ ٣٣ وكما يشرح الكاشى فحيث ان الأعداد ١، ١٠٠ ، ١٠٠٠٠ لها جذور تربيعية صحيحة (على عكس ١٠ ، ١٠٠٠ ... إلخ) فإن هذه الدورات ذات أهمية ، فالدورة الأولى تحسب الآحاد ، والثانية (١٧) تحسب عدد المئات ، والثالثة (٣٣) عدد عشرات الألوف . وهكذا .. ثم يرسم خطا عند قمة العدد وخطوطا رأسية تفصل الدورات كما يبدو فى الشكل (١) .

(أ)

٣٣	١٧	٨١

(ب)

٥		
٣٣	١٧	٨١
٨		
٥		

(جـ)

٥		
٣٣	١٧	٨١
٨	٠	
١		
٥		

(٢) للحصول على الخانات الثلاث الأولى للجذر يبحث الكاشي عن أكبر عدد ن بحيث لا يزيد ن^{٢} عن ٣٣ . بالطبع ن = ٥ يكتب

الكاشي العدد ٥ أعلى (شكل ب) وأسفل ٣٣ بمسافة (شكل ب)
والآن نطرح ٢٥ من ٣٣ نحصل على ٨ ونكتبها تحت ٣٣ ونضع خطا تحت ٣٣ لتوضيح أنه فرغ من الجزء ٣٣ والآن يضاعف الكاشي الجزء من الجذر الذى حصل عليه أي يضاعف ٥) ويكتب هذا المضاعف ١٠ فوق الخمسة مع إزاحة خانة واحدة إلى اليمين (شكل جـ)
عند هذه المرحلة لدينا إجابة جارية (مؤقته) ٥ في القمة ، وضعف هذه الإجابة (١٠) في الأسفل .

(٣) ثم يسأل الكاشي عن أكبر عدد س بحيث أن س (١٠٠ + س) ≤ ٨١٧ . والتجربة توضح أن س = ٧ فيكتب ٧ في القمة فوق قمة ١٧ ثم أسفل تالية للعشرة الموجودة أسفل كما هو موضح في الشكل (٢ أ) .
ثم يجرى الحساب س (١٠٠ + ٧) = ٧٤٩ ويطرح هذا الناتج من ٨١٧ ليحصل على ٦٨ (شكل ٢ . أ)

٥	٧	
٣٣	١٧	٨١
٨		
	٦٨	
١	٠٧	
٥		

شكل (٢ . أ)

٥	٧	
٣٣	١٧	٨١
٨		
	٦٨	
	١١	٤
١	٠٧	
٥		

شكل (٢ . ب)

٥	٧	٦
٣٣	١٧	٨١
٨		
	٦٨	٧٦
		٥
	١١	(٥٢)
		٤٦
١	٠٧	
٥		

شكل (٢ . جـ)

(٤) ثم يعيد العملية مرة أخرى مضاعفا الرقم الأخير فى ١٠٧ ليصبح ١١٤ ويكتب هذا فوق ١٠٧ ولكن مع إزاحة خانة إلى اليمين (انظر شكل (٢.ب) . ومرة أخرى لديه إجابة ٥٧ على القمة وضعف هذه الإجابة تحت (أسفل) (١١٤) ، وكما سبق يسأل ما هو أكبر رقم صحيح بحيث أن (١١٤٠ + س) س ≤ ٦٨٨١ . والإجابة بالتجربة هى س = ٦ وبضرب ٦ × ١١٤٦ وطرحها من ٦٨٨١ نحصل على ٥

أما الخانة الأخيرة فى ١١٤٦ فتضاعف ويصبح العدد ١١٥٢ أى (١١٤٦+٦) إنظر (٢.جـ)

(٥) وهكذا فإن الكاشى يكون قد حصل على جذر تربيعى تقريبى (٥٧٦) كإجابة مؤقتة وضعف هذا العدد (١١٥٢) عند القاع . وأخيرا يزيد الكاشى هذا العدد واحدا ليصبح ١١٥٣ ويقسم الباقى (٥) على ١١٥٣ فيحصل على الجذر التربيعى التقريبى للعدد ٣٣١٧٨١ وهو ٥٧٦ $\frac{٥}{١١٥٣}$

٥٧٦ = ٥٧٦,٠٠٤٣٤

ولو حسبنا مربع هذا العدد لوجدناه ٣٣١٧٨١,٠٩٩٦ مما يوضح أن نتيجة الكاشى قريبة جدا من الجذر التربيعى .

تبرير طريقة الكاشى

يثور هنا سؤلان : (١) ما هو التبرير لطريقة الكاشى فى حساب الجزء الصحيح من الجذر (٥٧٦) .

(٢) ما هو التبرير لطريقة الكاشى فى حساب الجزء الكسرى .

سوف نبدأ بالإجابة على الجزء الثانى أولا أنه الأسهل .

الجزء الكسرى

الواقع أن بسط الكسر (وهو خمسة) يساوى ٣٣١٧٨١ - $(٥٧٦)^٢$ ، بينما المقام هو $(٥٧٧)^٢$ - $(٥٧٦)^٢$. وذلك لأن ١١٥٣ يزيد واحدا عن ضعف الإجابة المعروفه (٥٧٦) أى أن

$$١١٥٣ = ١ + ٢ \times ٥٧٦ = (١ + ٥٧٦)^٢ - (٥٧٦)^٢$$

وهكذا فإن الجزء الكسرى من الإجابة ($\frac{٥}{١١٥٣}$) هو بالضبط ما نحصل عليه من الإستكمال الخطى أى $\frac{٣٣١٧٨١ - (٥٧٦)^٢}{(٥٧٧)^٢ - (٥٧٦)^٢}$

وهو إسلوب قديم إستخدمه بطلميوس فى كتابه (المجسطى) فى النصف الأول من القرن الثانى الميلادى ولفهم هذا الإسلوب كما فهمه وبرره فلكيو القرون الوسطى ، نتصور جدولا عموده الأول هو المربعات الأعداد الصحيحة ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... وعموده الثانى هو الأعداد الصحيحة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

ن	$\sqrt{ن}$
١	١
٤	٢
٩	٣
١٦	٤
⋮	⋮
٣٣١٬٧٧٦	٥٧٦
٣٣٢٬٩٢٩	٥٧٧
⋮	⋮

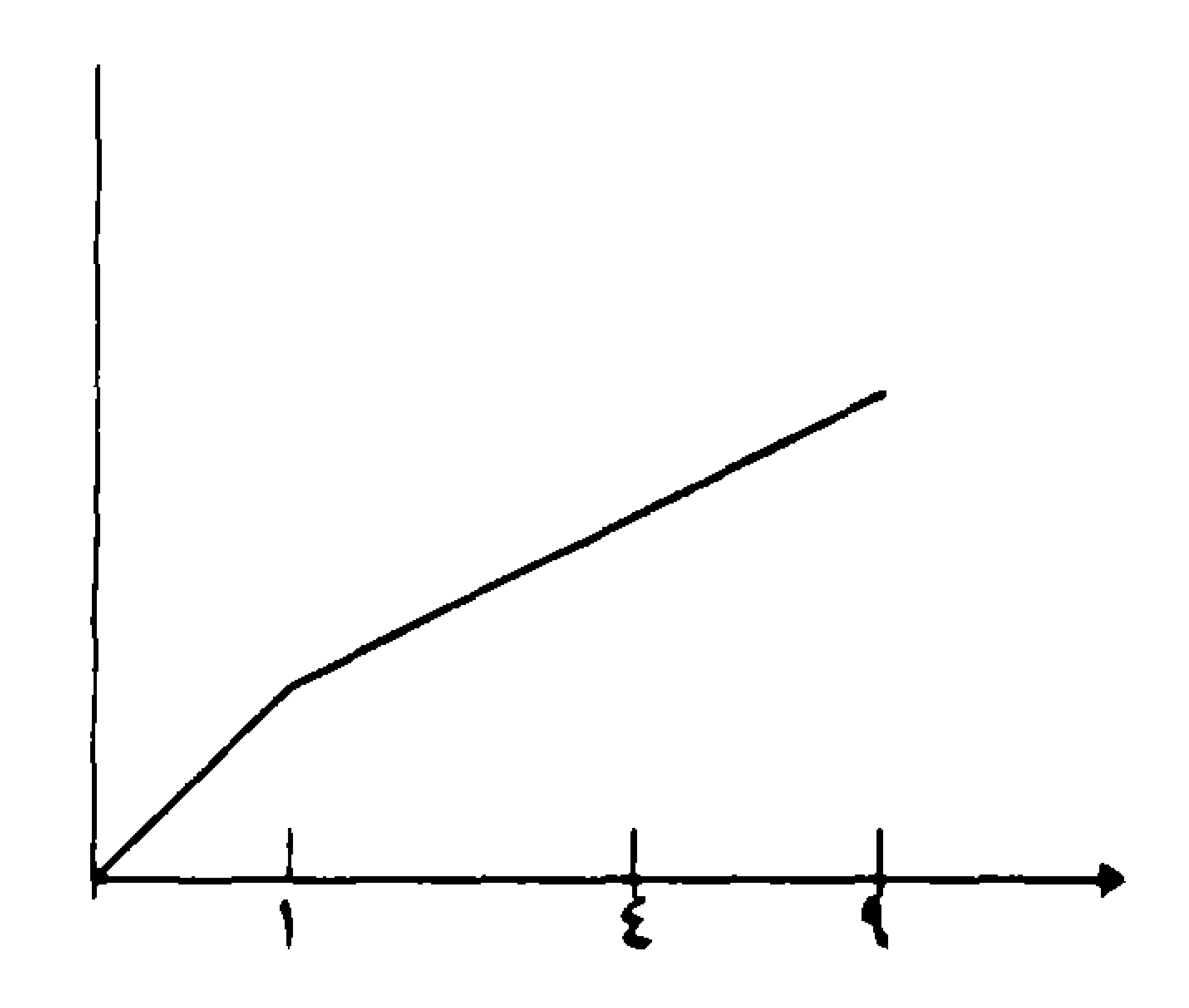
جدول (٣)

لإيجاد $\sqrt{٦}$ فإن أسهل طريقة هو أن نلاحظ أن ٤ $<$ ٦ $<$ ٩ وبالتالى
فإن ٢ $<$ $\sqrt{٦}$ $<$ ٣ أيضا وحيث أن ٦ − ٤ = ٢ ، ٩ − ٤ = ٥
فإن ٦ تقع فى $\frac{٢}{٥}$ المسافة بين ٤ ، ٩ وبالتالى فإن $\sqrt{٦}$ هى أيضا تقريبا
فى $\frac{٢}{٥}$ المسافة بين ٢ ، ٣

أى $\sqrt{٦}$ = ٢ $\frac{٢}{٥}$ تقريبا

نلاحظ هنا أن هذا التحليل مبنى على افتراض أن $\sqrt{س}$ يتناسب مع
س أو بمعنى آخر أن الدالة د(س) = $\sqrt{س}$ خطية ، اى أن منحنى

الدالة خط مستقيم . وبالرغم من أن هذا ليس صحيحا تماما كما نرى من الشكل ، إلا أن هذا الشكل يوضح أيضا أن المنحنى تقريبا مستقيم لقيم س > ١ بشرط ألا تكون الفترة [أ ، ب] كبيرة



وهذا هو السبب فى الحصول على تقريب جيد فى هذا التمرين

ويوضح الجدول (٣) أن (٥٧٦)^{٢} = ٣٣١٧٧٦ < ٣٣١٧٨١ < ٣٣٢٩٢٩ =(٥٧٧)^{٢}

وحيث ان ٣٣١٧٨١ − (٥٧٦)^{٢} = ٥ بينما (٥٧٧)^{٢} − (٥٧٦)^{٢} = ١١٥٣

نستنتج أن الجذر التربيعى للعدد ٣٣١٧٨١ يقع بالتقريب عند

$\frac{٥}{١١٥٣}$ من المسافة بين ٥٧٦ ، ٥٧٧

أى أن $\sqrt{٣٣١ر٧٨١} = ٥٧٦\frac{٥}{١١٥٣}$

تبرير الجانب الصحيح :

يعرف الكاشي أنه إذا كان لدينا العدد

٣ ٣ ١ ٧ ٨

ن = أ ب ج د ه و

فإن أكبر عدد صحيح س يحقق $س^٢ \leq ن$ له نصف عدد خانات ن (٣ في حالتنا هذه) ولذلك يقسم ن إلى ما يسميه دورات ولذا يضع

$$ن = أ ب + جـ د \times ١٠^٢ + هـ و \times ١٠^٤$$

والآن فإن الخطوة الأولى عند الكاشي هو إيجاد أكبر عدد م بحيث أن $م^٢ \leq هـ و$

م سيكون مكون من خانة واحدة لأن هـ و له خانتان

م سيكون الرقم الأول في الجذر كما يمكن أن نتحقق (م = ٥)

والخطوة الثانية هي حساب الفرق

$$\Delta_١ = ن - (م \times ١٠^٢)^٢$$

$$= (هـ و - م^٢)\ ١٠٠^٢ + جـ د \times ١٠^٢ + أ ب$$

ثم نبحث الخطوة التالية وهي إيجاد أكبر عدد ك بحيث أن

$$\Delta_٢ = ن - (م \times ١٠^٢ + ك \times ١٠)^٢ \geq ٠$$

بالتجربة نجد أن ك = ٧ ولا تنفع ك = ٨

وهو يستخدم المتطابقة الأساسية $(س + ص)^٢ = س^٢$

$+ (٢ س + ص)\ ص$

فيجعل $\Delta_{٢}$ = ن – (م × ١٠٠ $)^{٢}$ – (٢م × ١٠٠ + ك × ١٠) ك × ١٠

= $\Delta_{١}$ – (٢م × ١٠ + ك) ك × ١٠٠

التعبير ٢ م × ١٠ + ك هو المكافئ لإقتراح الكاشي بمضاعفة م (الرقم السابق في الجذر) ثم وضع الرقم ك (٧) تاليا لها .

وكما يقول الكاشي فإن هذا الرقم التالي يختار كالأكبر بحيث أن حاصل الضرب

(٢م × ١٠ + ك) ك × ١٠٠ لا يزيد عن الفرق السابق

وضرب ٢ م في ٢٠٠٠ بدلا من ١٠٫٠٠٠ يتضح في إزاحته خانة إلى اليمين ولابد أن يكون قد أصبح واضحا الآن الإسلوب الذى إتبعه الكاشي عندما يعين ك كأكبر ما يحقق (م × ١٠٠ + ك × ١٠$)^{٢}$ ≤ ن

ثم نختار ع ليكون أكبر ما يحقق

ن – (م × ١٠٠ + ك × ١٠ + ع $)^{٢}$ ≥ ٠

حيث يأخذ س = م × ١٠٠ + ك × ١٠

ص = ع

ويستخدم المتطابقة (س + ص$)^{٢}$ = $س^{٢}$ + (٢ س + ص) ص

إن هذه المتطابقة أو صورتها البديلة ، (س + ص$)^{٢}$ – $س^{٢}$

= (٢س + ص) ص

هي أساس خوارزمية إستخلاص الجذور

وطريقة الكاشي تستفيد من حقيقة أنه عند إيجاد ن – (س + ص$)^{٢}$

فإن الجزء ن – $س^{٢}$ قد حسب في الخطوة السابقة

الكاشي والجذر الخامس

من المدهش أن الكاشي قد حسب الجذر الخامس للعدد ١٩٧٫٥٠٦٫٨٩٩٫٢٤٠٫٤٤ وهو من رتبة الترليونات . ويصل من حساباته إلى أن الجذر الخامس هو

$$٥٣٦ + \frac{٢١}{٤١٤٫٢٣٧ ٫ ٧٤٠٢٨١}$$

وإستخلاص الجذر الخامس والجذور الأعلى كان وفق شهادة الخيام في كتابه "الجبر" من صنعه فهو يقول في هذا الكتاب إنه إبتكر طرقا للحصول على الجذر الرابع والخامس والسادس والجذور الأعلى "ولم يسبقنا أحد في هذا " وهذه البراهين حسابية تماما ومبنية على حساب " الأصول " . والحقيقة أن الخيام ليس أول ولا آخر رياضي يعتقد خطأ أنه مبتكر طريقة رياضية جديدة فنحن نعلم أن "أبو الوفا " الذي عاش قبل الخيام بمائة عام في أواخر القرن العاشر كتاب كتابا عنوانه "حول إيجاد الجذر الثالث والرابع والجذور الأعلى من هذا". وبالطبع فالأرجح أن الخيام لم يكن على علم بكتاب " أبو الوفا " وأن عمل " أبو الوفا " لم يكن في إبتكارية إنجاز الخيام .

نصير الدين الطوسي : أبو جعفر بن الحسن نصير الدين الطوسي ولد عام ١٢٠٠م ومات ١٢٧٤ م وكان يلقب بالمحقق . قضى الطوسي شبيبة مغامرة حيث وشي به أحد وزراء الخليفة المعتصم فأودع السجن ، وفيه انجز معظم

تأليفه فى العلوم الرياضية . ثم أسره المغول عام ١٢٥٦ م وبفضل سمعته فى العلوم والنجوم إستخدمه هولاكو ضمن بطانته حتى أصبح وزيرا له . وقد شهد الطوسى سقوط بغداد على أيدى المغول عام ١٢٥٧ م .

ولقد نجح الطوسى فى إقناع هولاكو ببناء مرصد مراغة الشهير وظل متوليا إدارته حتى وفاته . وتتعلق معظم كتبه بالرياضيات والفلك وإلى حد أقل بالجغرافيا والفلسفة والطب . ومن أشهر كتبه كتاب (تذكرة فى علم الهيئة) وهو خلاصة مركزة للنظريات الفلكية فى عصره ، وفيه ينقد نظريات بطلميوس فى كتاب (المجسطى) . وهذا النقد كان الخطوة الأولى التى مهدت لكوبرنيكس القيام بإصلاحاته فى علم الفلك .

ومن أهم أعماله دراسة المسلمة الخامسة فى أصول إقليدس (مسلمة التوازى) ، وقد ثبت أن معرفة زخارى بعد ذلك بكتابات الطوسى هى بداية عمله فى الهندسة اللاقليدية . ولقد ترجمت كتابات الطوسى فى الهندسة بواسطة العالم الإنجليزى جون والس Wallis وكانت أساس محاضراته فى جامعة أكسفورد فى القرن الخامس عشر .

وقد ألف الطوسى أيضا فى حساب المثلثات والجبر ، ففى حساب المثلثات كان أول من حاول وضعه كعلم مستقل عن الفلك فى كتابه (شكل القطاع) وعليه إعتمد الأوبيون زمنا طويلا فى تدريس حساب المثلثات المستوية والكروية .

وللطوسى أيضا فى الهندسة (كتاب تحرير أصول إقليدس) ، و (الرسالة الشافية عن الشك فى الخطوط المتوازية) ، وفيها حاول أن يستنبط المسلمة الخامسة من المسلمات الأربع الأولى الواردة فى كتابه الأصول .

وهناك من يرى أن الطوسى قد إطلع على أعمال الخيام فى قضية التوازى .

أبو الكامل وعلم الجبر :

من الباحثين النشطين زمن وفاة ثابت بن قره ٩٠١ م ، من مصر وكان معروفا بإسم " الحاسب المصرى " وكتابه فى الجبر بمثابة تعليق على كتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة) وقد أصبح كتابه هذا مرغوبا جدا حتى أن باحثا مثل " الكرجى " فى أواخر القرن العاشر والإيطالى ليونار دى بيزا (والمعروف بإسم فيبوناتشى) Fibonacci فى أواخر القرن الثانى عشر قد إستخدما بكثرة الأمثلة الواردة فى كتاب أبو الكامل .

ومن المتوقع أن يكون هناك تشابه كبير بين كتابه فى الجبر وكتاب الخوارزمى فهو مثلا يستخدم مصطلحات الخوارزمى الأساسية كالجذور والمال للتعبير عن س ، س^{٢}، ثم هناك نفس التقنين لمعادلات الدرجة الثانية إلى ستة أنواع وبنفس الترتيب . وأخيرا يناقش أبو الكامل - مثل الخوارزمى- البراهين الهندسية للأمثلة الواردة .

ومع ذلك فإن كتاب أبو الكامل بإعطائه صيغا عامة لقواعد يستخدمها الخوارزمي في أمثلة أنما يتقدم على الخوارزمي ، ثم يقدم براهين على هذه القواعد في التعامل مع الكميات الجبرية على النحو التالي :

(١) $(أ \pm ق\,س)(ب \pm ك\,س) = أ\,ب \pm ب\,ق\,س \pm أ\,ك\,س + ق\,ك\,س^{٢}$

$(أ \pm ق\,س)(ب \mp ك\,س) = أ\,ب \pm ب\,ق\,س \mp أ\,ك\,س - ق\,ك\,س^{٢}$

(٢) $\sqrt{أ\,ب} = \sqrt{أ} \cdot \sqrt{ب}$ ، $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

(٣) $\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب} = \sqrt{أ + ب \pm ٢\sqrt{أ\,ب}}$

مسألة من كتاب أبو الكامل

يحتوى كتاب أبو الكامل على ٦٩ مسألة مختلفة ، على عكس كتاب الخوارزمي الذى يحتوى على ٤٠ مسألة فقط . ومن أكثر المسائل إثارة للإهتمام المسألة (٦١) وهي كما يلي :

" يقول رجل إن العشرة مقسمة إلى ثلاثة أجزاء . وإذا ضرب الجزء الأصغر في نفسه وأضيف إلى الجزء الأوسط مضروبا في نفسه فإن الناتج هو الجزء الأكبر مضروبا في نفسه . وإذا ضرب الجزء الأصغر في الجزء الأكبر فإن الناتج هو الجزء الأوسط مضروبا في نفسه .

إنه يتحدث هنا عن ثلاث مقادير س ، ص ، ع موجبه بحيث $س < ص < ع$ وتحقق الشروط التالية :

$$١٠ = س + ص + ع$$

$$ع^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$$

$$\text{س ع} = \text{ص}^{\text{٢}}$$

ولحل المسألة يضع س = ١ فتصبح الشروط

$$\text{ص} + \text{ع} = \text{٩}$$

$$\text{ع}^{\text{٢}} = \text{١} + \text{ص}^{\text{٢}}$$

$$\text{ع} = \text{ص}^{\text{٢}}$$

وفى المعادلتين الأخيرتين بحذف ع نحصل على

$$\text{ص}^{\text{٤}} = \text{١} + \text{ص}^{\text{٢}} \qquad \text{أى } \text{ص}^{\text{٤}} - \text{ص}^{\text{٢}} - \text{١} = \text{٠}$$

(معادلة من الدرجة الثانية فى $\text{ص}^{\text{٢}}$)

$$\therefore \quad \text{ص}^{\text{٢}} = \frac{\text{١} + \sqrt{\text{٥}}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \sqrt{\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}} = \text{ع}$$

$$\text{او ص} = \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \sqrt{\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}}}$$

$$\text{أى} \qquad \text{١} + \text{ص} + \text{ع} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} + \sqrt{\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}} + \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \sqrt{\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}}}$$

وإذا أسمينا هذا المقدار أ مثلا فإن من المفروض أن تكون أ تساوى ١٠ ولكن من الواضح أنها ليست كذلك . فإذا وضعنا

$$\text{ب} \left(\text{١} + \text{ص} + \text{ع} \right) = \text{١٠}$$

$$\text{أى ب} + \text{ب ص} + \text{ب ع} = \text{١٠} \qquad \text{أى أن}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{١٠}}{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \sqrt{\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}} + \sqrt{\frac{\text{١}}{\text{٢}} + \sqrt{\text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}}}}$$

ن الواضح أن الحلول المطلوبة هى ب ، ب ص ، ب ع .

لن نستمر فى تفاصيل بحث أبو الكامل ، وسوف نكتفى أن نذكر أنه

ـ على قيمة ب كجذر للمعادلة $\sqrt{٣١٢٥} - ٧٥ + \text{ب}^{٢} = \text{ب } ١٠$

ومنها نحصل على $\sqrt{٥٠ - \sqrt{٣١٢٥}} - ٥ = \text{ب}$

ثم يحصل على قيمة $\sqrt{١٢\frac{١}{٢} - \sqrt{٧٨\frac{١}{٤}}} - \sqrt{٣١\frac{١}{٤}} + \frac{١}{٢} = \text{ع}$

حل هذه المسألة يوضح المستوى العلمى الذى كان عليه أبو الكامل فى ـ الزمان القديم

الإستقراء الرياضى فى الحضارة العربية الإسلامية

القرن العشرين ، فى أوربا ، نقح تاريخ الإستقراء الرياضى وأعيدت كتابته ة مرات منذ عام ١٩٠٩ ولقد بدأ الأمر برأى بسيط قصير جدا ... ثلاث حات فى نشرة الجمعية الرياضية الأمريكية زعزع بواسطتها فاكا (Vacca كيدا كان مقبولا من قبل المؤرخين الغربيين ، ومفاده أن الإستقراء ياضى هو من منجزات القرن السابع عشر ويجب أن ينسب إلى باسكال Pasc ، إذ أوضح فاكا أن الفضل الأول فى إكتشاف منهج الإستقراء ياضى إنما يعود إلى (موروليكو) لا إلى باسكال .

وبعد ٤٤ عاما من نقد فاكا وبعد فحص متصل لأعمال (موروليكو) ضح فرويدنتال أن هناك ثلاث محاولات لإستخدام الإستقراء الرياضى

السابقة على باسكال، بحيث يمكن أن نقول أن باسكال قدم مبدأ الإستقراء الرياضى مصاغا للمرة الأولى بشكل مجرد .

ومنذ دراسة فرويدنتال حاول آخرون إرجاع هذه الطريقة فى البرهان إلى ليفى بن جرسون وسوف نحاول هنا أن نبين أن محاولات أكثر أهمية – وسابقة على موروليكو وليفى بن جرسون – موجودة لدى رياضيين مسلمين ، أحدهما لديه أعمال معروفة من قبل المؤرخين الغربيين وهو الكرجى ، والآخر إكتشفت أهميتة حديثا وهو السموأل .

[الكرجى أو الكرخى ... لا نعرف عن حياته سوى أنه عاش فى بغداد فى نهاية القرن العاشر الميلادى وبداية القرن الحادى عشر . أما السموأل فهو السموأل بن يحيى بن العباس المغربى المتوفى ١١٧٥م ، وله كتابه الشهير (الباهر) فى الجبر]

ففى نص للكرجى يعرضه السموأل فى كتابه "الباهر" نجد للمرة الأولى فى التاريخ – على حد علمنا – صيغة ذات الحدين $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} =$

$$\sum_{\text{ر}=}^{\text{ن}} \text{ن ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ر}}\ \text{ب}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

ونلاحظ نموذجا من البرهان ومراحله كما يلى :

(١) يبدأ المؤلف ببرهنة بعض القضايا التبادلية والمتعلقة بتوزيع الضرب على الجمع .

تبادلية من نوع (أب) . (جـ د) = (أجـ) . (ب د)

وتوزيع الضرب على الجمع من نوع

$$(أ + ب) جـ = أ جـ + ب جـ$$

(٢) بواسطة هذه القضايا يتولى السموأل برهان الصيغتين التاليتين :

$$(أ + ب)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} ن ق_{ر} \; أ^{ر} \; ب^{ن-ر} \quad ن \text{ عدد صحيح}$$

$$(أ ب)^{ن} = أ^{ن} . ب^{ن}$$

كي يبرهن المتطابقة الأولى يفترض السموأل معرفة القارئ بمفكوك $(أ + ب)^{٢}$ المعطى فى كتاب (البديع) للكرجي ، ثم يتولى برهان المتطابقة فى حالة ن = ٣ ويحتوى البرهان على المرحلتين التاليتين :

$$(أ + ب) (أ + ب)^{٢} = (أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}) (أ + ب)$$

$$= أ^{٢}(أ + ب) + ٢ أب (أ + ب) + ب^{٢} (أ + ب) \quad \text{مستخدما قانون التوزيع}$$

$$= أ^{٣}+أ^{٢}ب+٢أ^{٢}ب+٢أب^{٢}+ب^{٢} أ+أ^{٣} \quad \text{مستخدما قانون التوزيع}$$

$$= أ^{٣}+٣ أ^{٢}ب + ٣ أ ب^{٢} + ب^{٣} \quad \text{مستخدما قانون التبادل}$$

(٣) بالطريقة نفسها يبرهن المتطابقة فى حالة ن = ٤

(٤) لم يبرهن حالة ن = ٥ ، وإنما حسب معاملات ذات الحدين حتى ن = ١٢ مستخلصه من مؤلف الكرجي وقاعدة إنشائها عند الكرجي تكافئ

$$ن ق_{ر} = {}^{ن-١}ق_{ر-١} + {}^{ن-١}ق_{ر}$$

تلك كما نرى هي البدايات الحقيقية لمبدأ الإستقراء الرياضى بالمثل يتناول السموأل المتطابقة $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} . ب^{ن}$

فهو يبرهن $(أ ب)^{٣} = أ^{٣} . ب^{٣}$ من $أ^{٢} ب^{٢} = (أ ب)^{٢}$ بضرب الطرفين فى أ ب

$$(أ ب) . (أ^{٢} ب^{٢}) = أ ب . (أ ب)^{٢} = (أ ب)^{٣}$$

ولكن $(أ ب) . (أ^{٢} ب^{٢}) = (أ . أ^{٢}) . (ب . ب^{٢}) = أ^{٣} ب^{٣}$

إذن $أ^{٣} ب^{٣} = (أ ب)^{٣}$

ثم يبرهن السموأل حالة ن = ٤ ويقول إنه بمثل هذا البرهان يمكن برهان الحالة العامة

<u>مجموع الأعداد الطبيعية وقواها :</u>

فى كتاب (الباهر) للسموأل يرد التالى :

برهن أن $٢ \sum_{ر=}^{ن} ر = ن (ن + ١)$

والبرهان كما يلى :

$$\sum_{ر=}^{ن} ر = ن + (ن-١) + (ن-٢) + \cdots + ١$$

$$\sum_{ر=٠}^{ن} ر = ١ + ٢ + ٣ + \cdots ن$$

بالجمع نجد أن $٢ \sum_{ر=٠}^{ن} ر = (ن+١) + (ن+١) + (ن+١) + \cdots$

$$= ن (ن +١)$$

صحيح أن الأمثلة التى أعطيت فى كتاب الباهر تتعلق بحالات مثل ن = ٤ ، أو ٥ أو ٦ لكن المنطق الذى إستخدم منطق عام ولا يحتاج إلا إلى صياغة له حتى تستكمل عناصر الإستقراء الرياضى بمعناها الحديث .

(٢) غالبا ما نقرأ فى كتب تاريخ الرياضيات أن الصيغة

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$$

قد برهنت من قبل الكرجى لكن الأمر ليس كذلك فى الواقع . فالكرجى أعطى صيغة مكافئة وهى

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} \left(\frac{٢}{٣}\text{ن} + \frac{١}{٣}\right)$$

لقد برهنت المتطابقة $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٢} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$ من قبل إبن الهيثم و يعود السموأل فى كتابه (الباهر) للبرهان عليها جبريا

(٣) كذلك يتضح من (الباهر) أنه كان على معرفة بالمتطابقة

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^{٣} = \left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}\right)^{٢}$$

<u>**ملحوظة :**</u>

الجزء الأخير من هذه المحاضرة والمتعلق بالإستقراء الرياضى مأخوذ من كتاب د.رشدى راشد (تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب) طبعة بيروت .

(١١)

عصر النهضة الأوربية ومعادلات الدرجة الثالثة

يعتبر عصر النهضة فى أوربا هو القرن السادس عشر والقرن السابع عشر الميلادى ، إذ أنه بداية اليقظة الأوربية بعد أن غرقت أوربا فى ظلمات القرون الوسطى أمدا طويلا . ولقد كانت تلك الفترة بداية قيام نظام إقتصادى جديد (الرأسمالية) وإنهيار النظام الإقطاعى القديم ، وصحب ذلك قيام حركة الإصلاح الدينى على يد لوثر فى ألمانيا وكلفن فى سويسرا .

وقد إرتبطت هذه اليقظة الجديدة بالعودة إلى البحث فى التراث اليونانى العلمى الذى وصل اوربا أولا عن طريق الترجمات العربية ، كما كان علماء تلك الفترة على علم شبه كامل بالإنجازات العربية فى الرياضيات وذلك من خلال ترجمتهم للكتب العربية التى حصلوا عليها إما خلال الحروب الصليبيه ، أو بعد ذلك من الأندلس او صقلية. وحيث أن الإنجازات العربية فى الجبر كانت قد توقفت عند الحلول البيانية لمعادلات الدرجة الثالثة نتيجة تقاطع القطاعات المخروطية (الخيام) فقد كان من الطبيعى أن تتجه الجهود فى أوربا إلى البحث عن حل جبرى لمعادلات الدرجة الثالثة ومن بعدها معادلات الدرجة الرابعة ، وبدأت إنطلاقة جديدة لعلم الجبر وساعد على ذلك ظهور إستخدام رمزية جديدة لهذا العلم على يد فيتا Vietta فى فرنسا .

ويعتبر الإيطالى سيسبيو فرو Scipio Ferro (إيطالى) أول من قدم حلا جبريا للمعادلة $س^{3} + م\ س = ن$

وفى ذلك الزمان كان إكتشاف أمر كهذا يعتبر سرا عائليا لا يجوز إفشاؤه ، وظل هذا السر مجهولا من الآخرين لمدة ثلاثين عاما (أوائل القرن السادس عشر) إلى أن إكتشف الإيطالى تارتاجليا حلا للمعادلة

$$س^{3} + م\ س^{2} = ن$$

وعندما علم كاردان بإكتشاف تارتاجليا للحل طلب منه أن يطلعه على هذا السر مع وعد ألا يذيع هذا لأحد أبدا . لكنه لم يحافظ على وعده وقام بنشر الحل فى مجلة إيطالية حوالى منتصف القرن السادس عشر . ومازالت الكتب حتى اليوم تنسب الحل الجبرى لمعادلات الدرجة الثالثة لكاردان ، مع أنه لم يكن أكثر من ناقل لهذا الحل .

٢) <u>الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة :</u>

سوف نعرض خلال السطور التالية الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة فى صورته النهائية كما نعرضه اليوم

ولنعتبر المعادلة $س^{3} + أ_{1}\ س^{2} + أ_{2}\ س + أ_{3} = ٠$ (١)

فى هذه المعادلة يمكن دائما التخلص من الحد الثانى ($أ_{1}\ س^{2}$) وذلك بالتعويض التالى

ضع $س = ص - \frac{أ_1}{٣}$ فى المعادلة (١)

نجد أن $\left(ص - \frac{أ_1}{٣}\right)^٣ + أ_1 \left(ص - \frac{أ_1}{٣}\right)^٢ + أ_2 \left(ص - \frac{أ_1}{٣}\right) + أ_3 = ٠$

معامل $ص^٢$ هو $- ٣ \times \frac{أ_1}{٣}$ من الحد الأول ، $أ_1$ من الحد الثانى

أى أن المعادلة بهذا التعويض تتحول إلى معادلة من الدرجة الثالثة فى ص على النحو التالى :

$$ص^٣ + ق\,ص + ك = ٠ \qquad (٢)$$

وبالتالى يمكن إعتبار المعادلة (٢) هى الصيغة العامة لمعادلات الدرجة الثالثة ، إذ يمكن دائما القضاء على الحد الخاص $س^٢$ بإستخدام التحويله $س = ص - \frac{أ_1}{٣}$

والآن نعتبر المعادلة (٢) ونضع

$$ص = ع - \frac{ق}{٣\,ع} \qquad (٣)$$ حيث ع متغير مجهول

بالتعويض فى (٢)

$$\left(\text{ع} - \frac{\text{ق}}{٣\,\text{ع}}\right)^{٣} + \text{ق}\left(\text{ع} - \frac{\text{ق}}{٣\,\text{ع}}\right) + \text{ك} = ٠$$

وبالإختصار نجد أن هذه المعادلة تصبح

$$\text{ع}^{٣} - \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧\,\text{ع}^{٣}} + \text{ك} = ٠$$

أو $$\text{ع}^{٦} + \text{ك}\,\text{ع}^{٣} - \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧} = ٠ \qquad (٤)$$

المعادلة (٣) هى معادلة من الدرجة الثانية فى $\text{ع}^{٣}$.

أى أن $$\text{ع}^{٣} = -\frac{\text{ك}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ك}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧}}$$

$$= -\frac{\text{ك}}{٢} \pm \sqrt{\text{ر}}$$

حيث $$\text{ر} = \frac{\text{ك}^{٢}}{٢} + \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧}$$

وبالتالى

$$ع_{١} = \left(-\frac{ك^{٢}}{٢} + \sqrt{ر}\right)^{\frac{١}{٣}} \qquad (٥)$$

$$ع_{٢} = \left(-\frac{ك^{٢}}{٢} - \sqrt{ر}\right)^{\frac{١}{٣}} \qquad (٦)$$

سوف نلاحظ أن $ع_{١}\, ع_{٢} = \left(\frac{ك^{٢}}{٤} - \frac{ك^{٢}}{٤} - \frac{ق^{٣}}{٢٧}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$$= -\frac{ق}{٣} \qquad (٧)$$

نفرض أن جذور (٥) هى $أ$ ، $أ\omega$ ، $أ\omega^{٢}$

وأن جذور (٦) هى $ب$ ، $ب\omega$ ، $ب\omega^{٢}$

على ضوء التحويله (٣) ، والنتيجة (٧) فإن جذور المعادلة (٢) هى

$ص_{١} = أ + ب$ ، $ص_{٢} = أ\omega + ب\omega^{٢}$ ، $ص_{٣} = أ\omega^{٢} + ب\omega$

<u>مثال :</u> حل المعادلة $ص^{٣} - ١٨\, ص - ٣٥ = ٠$ ، هنا $ق = -١٨$ ، $ك = -٣٥$

ضع $\text{ص} = \text{ع} + \frac{٦}{\text{ع}}$ فى المعادلة التكعيبية

نحصل على المعادلة

$$\text{ع}^{٦} - ٣٥\,\text{ع}^{٣} + ٢١٦ = ٠$$

$$\text{ع}^{٣} = \frac{٣٥}{٢} \pm \frac{١}{٢}\sqrt{(٣٥)^{٢} - ٨٦٤}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[٣٥ \pm \sqrt{٣٦١}\right] = \frac{١}{٢}\left[٣٥ \pm ١٩\right]$$

$$\text{ع}_{١}^{٣} = ٢٧ \text{ ، } \text{ع}_{٢}^{٣} = ٨$$

إذن الجذور الخاصه بـ ع هى $٣ \text{ ، } ٣\omega \text{ ، } ٣\omega^{٢}$

، $٢ \text{ ، } ٢\omega \text{ ، } ٢\omega^{٢}$

حيث $\omega = \frac{١}{٢}(-١ + \text{ت}\sqrt{٣})$ ، $\omega^{٢} = \frac{١}{٢}(-١ - \text{ت}\sqrt{٣})$

وبالتالى فإن جذور معادلة ص هى

$$\text{ص}_{١} = ٥ \text{ ، } \text{ص}_{٢} = ٣\omega + ٢\omega^{٢} \text{ ، } \text{ص}_{٣} = ٣\omega^{٢} + ٢\omega$$

أى ص$_1$ = ٥ ، ص$_2$ = − ٢ + $\frac{١}{٢}\sqrt{٣}$ ت ، ص$_3$ = − ٢ − $\frac{١}{٢}\sqrt{٣}$ ت

(٣) <u>**مميز معادلة الدرجة الثالثة :**</u>

ص$_1$ = أ + ب ، ص$_2$ = أ ω + ب ω^2 ، ص$_3$ = أ ω^2 + ب ω

ص$_1$ − ص$_2$ = أ (١ − ω) + ب (١ − ω^2)

= (١ − ω) (أ + ب (١ − ω))

= (١ − ω) (أ − ω^2 ب) لأن ١ + ω + ω^2 = ٠

ص$_1$ − ص$_3$ = أ + ب − ω^2 أ − ωب

= أ (١ − ω^2) + ب (١ − ω)

= أ (١ − ω^2) + ب (ω^3 − ω)

= أ (١ − ω^2) − ω ب (١ − ω^2)

= (١ − ω^2) (أ − ωب)

ص$_2$ − ص$_3$ = (ω − ω^2) (أ − ب)

إذن

$$(\text{ص}_1 - \text{ص}_2)(\text{ص}_1 - \text{ص}_3)(\text{ص}_2 - \text{ص}_3)$$

$$= (1-\omega)(1-\omega^2)(\omega - \omega^2)(\text{أ}-\text{ب})(\text{أ}-\omega\text{ب})(\text{أ}-\omega^2\text{ب})$$

$$= 3(\omega + 1 + \omega)(\text{أ}^3 - \text{ب}^3)$$

$$= 3\,\text{ت}\sqrt{3}\,(\text{أ}^3 - \text{ب}^3)$$

ولكن $\text{أ}^3 - \text{ب}^3 = 2\sqrt{\text{ر}}$

$$\therefore (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2(\text{ص}_1 - \text{ص}_3)^2(\text{ص}_2 - \text{ص}_3)^2 = -108\,\text{ر} \quad (1)$$

الطرف الأيمن فى (١) يسمى مميز المعادلة وهو عبارة عن مربع حاصل ضرب الفرق بين الجذور ويرمز له عادة بالرمز مـ أى أن

$$\text{مـ} = -108\,\text{ر} = -(4\,\text{ق}^3 + 27\,\text{ك}^2)$$

$$= -108\left(\frac{\text{ك}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}\right)$$

فإذا كانت جذور المعادلة التكعيبية كلها حقيقية فإن مـ لا بد أن يكون موجبا ،

أى $ر$ = سالب أى أن $\frac{ك^{٢}}{٤} + \frac{ق^{٣}}{٢٧}$ لابـد أن يكـون سالبا فى حالة الجذور الثلاثه حقيقية

وإذا كان هناك جذران متساويان فى المعادلة فإن $مـ$ = صفر وبالتالى $ر = ٠$

وفـى حالـة وجـود جذريـن تخيلـين مثـلا $ص_{١}$ حقيقـى ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ تخيليان

مثل $ص_{٢} = م + ن ت$

$ص_{٣} = م - ن ت$

$مـ = (ص_{١} - ص_{٢})^{٢} (ص_{١} - ص_{٣})^{٢} (ص_{٢} - ص_{٣})^{٢}$

$= (ص_{١} - م - ت ن)^{٢} (ص_{١} - م + ت ن)^{٢} (٢ ت ن)^{٢}$

$= [(ص_{١} - م)^{٢} + ن^{٢}]^{٢} \times (- ٤ ن^{٢})$ = سالب

أى أن $ر$ = موجب

وإذن عند التعرض لمعادلة من الدرجة الثالثة يلزم اولا بحث م ، أو ر

فإذا تبين أن ر سالب فمعنى هذا أن الجذور الثلاث حقيقية

وإذا تبين أن ر = صفر فمعنى هذا أن هنـاك جذريـن متسـاوين فـى المعادلة

وإذا تبين أن ر موجب فمعنى هذا أن هناك جذر حقيقى والآخـران تخيليان

<u>مثال :</u> فى المعادلة السابعة $\text{ص}^{٧} - ١٨\ \text{ص} - ٣٥ = ٠$

$$\text{ر} = \frac{\text{ك}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧}$$

هنا ق = −١٨ ، ك = − ٣٥

$$\text{ر} = \frac{(٣٥)^{٢}}{٤} - \frac{(١٨)^{٣}}{٢٧}$$

$$= \frac{١٢٢٥}{٤} - ٦^{٣} = \frac{١٢٢٥ - ٢١٦ \times ٤}{٤} = \frac{١٢٢٥ - ٨٦٤}{٤} = \text{موجب}$$

إذن هناك جذر حقيقى وجذران تخيليان

<u>مثال :</u> أوجد جذور المعادلة

$$\text{ص}^{٣} - \frac{٤}{٣}\,\text{ص} - \frac{١٦}{٢٧} = ٠ \qquad (١)$$

هناك $\text{ق} = -\frac{٤}{٣}$ ، $\text{ك} = -\frac{٢٦}{٢٧}$

$$\text{ر} = \frac{\text{ك}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧} = \frac{١٦ \times ١٦}{٤ \times ٢٧ \times ٢٧} - \frac{٤^{٣}}{٣^{٣} \times ٢٧}$$

$$= \frac{٦٤}{٢٧ \times ٢٧} - \frac{٦٤}{٢٧ \times ٢٧} = ٠$$

إذن هناك جذران متساويان ، والجذور كلها حقيقية .

لإيجاد الجذرين المتساويين يكفى أن نفاضل المعادلة (١) ونبحث عن جذر المعادلة التى جرى تفاضلها . أى

$$٣\,\text{ص}^{٢} - \frac{٤}{٣} = ٠ \qquad \text{ص}^{٢} = + \frac{٤}{٩}$$

$$\text{ص} = \pm \frac{٢}{٣}$$

أحد هاتين القيمتين لابد أن تحقق المعادلة (١) . بالتعويض

$$\text{ص} = -\frac{٢}{٣} \text{ فى } (١)$$

نجد أنها تحقق المعادلة لأن

$$-\frac{٨}{٢٧} + \frac{٨}{٩} - \frac{١٦}{٢٧} = \frac{-٨ + ٢٤ - ١٦}{٢٧} = \text{صفر}$$

وبالتالى فالمعادلة (١) لابد أن تكون على صورة

$$\left(\text{ص} + \frac{٢}{٣}\right)^{٢} \left(\text{ص} - \frac{٤}{٣}\right) = ٠$$

$$\therefore \quad \text{الجذور هى } \text{ص}_{١} = \frac{٤}{٣} \text{ ، } \text{ص}_{٢} = -\frac{٢}{٣} \text{ ، } \text{ص}_{٣} = -\frac{٢}{٣}$$

(٤) **<u>حالة الجذور الحقيقية المختلفة :</u> فى هذه الحالة ر = سالب ضع ر = - ل حيث ل موجب**

$$\therefore \quad -\frac{\text{ك}}{٢} + \sqrt{\text{س}} = -\frac{\text{ك}}{٢} + \text{ت}\sqrt{\text{ل}} = \text{م}(\text{جا هـ} + \text{ت جتا هـ})$$

$$\text{حيث م}^{٢} = \frac{\text{ك}^{٢}}{٤} + \text{ل} = \frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ق}^{٣}}{٢٧} \quad \text{أى أن م} = \sqrt{\frac{-\text{ق}^{٣}}{٢٧}}$$

م جتاهـ = $-\dfrac{\text{ك}}{٢}$ إن جتا هـ = $\dfrac{-\dfrac{\text{ك}}{٢}}{\sqrt{\dfrac{-\text{ق}^{٣}}{٢٧}}}$

بالمثل $-\dfrac{\text{ك}}{٢} - \sqrt{\text{س}} = \text{م}\ (\text{جا هـ} - \text{ت جتاهـ})$

وتكون جذور المعادلة السداسية هى $\text{م}^{\frac{١}{٣}}(\text{جا هـ} + \text{ت جتاهـ})^{\frac{١}{٣}}$ ،

$\text{م}^{\frac{١}{٣}}(\text{جا هـ} - \text{ت جتاهـ})^{\frac{١}{٣}}$

وتكون جذور معادلة الدرجة الثالثه هى

$٢\ \text{م}^{\frac{١}{٣}}\ \text{جتا}\left(\dfrac{\theta + ٢\,\text{ط ن}}{٣}\right)$ ن = ٠ ، ١ ، ٢

حيث م = $\sqrt{\dfrac{-\text{ق}^{٣}}{٢٧}}$ ، جتا $\theta = -\dfrac{\text{ك}}{\text{م}^{٢}}$

<u>مثال :</u> حل المعادلة $\text{س}^{٣} + ٩\,\text{س}^{٢} + ٢٣\,\text{س} + ١٤ = ٠$

ضع س = ص - ٣ وتتحول المعادلة إلى

$ص^{٣} - ٤ ص - ١ = ٠$ ، $ق = -٤$ ، $ك = -١$

$$ر = \frac{ك^{٢}}{٤} + \frac{ق^{٣}}{٢٧} = \frac{١}{٤} - \frac{٦٤}{٢٧} = \text{سالب}$$

إذن الجذور حقيقية ومختلفة

$$م = \sqrt{\frac{-ق^{٣}}{٢٧}} = \sqrt{\frac{٦٤}{٢٧}} = \frac{٨}{٣\sqrt{٣}}$$

$$\text{جتا } هـ = -\frac{ك}{٢م} = {}^{٢}$$

من الجداول $هـ = ٣' \ ٧١^{\circ}$

وبالحساب من جداول حساب المثلثات الجذور الثلاثة هى $٢ م^{\frac{١}{٣}} \text{جتا}\left(\frac{\theta}{٣}\right)$ ،

$$٢ م^{\frac{١}{٣}} \text{جتا}\left(\frac{\theta + ٢ ط}{٣}\right) ، ٢ م ٢ م^{\frac{١}{٣}} \text{جتا}\left(\frac{\theta + ٤ ط}{٣}\right)$$

والجذور هى $ص_{١} = ٢ر١١٤٩$ ، $ص_{٢} = -١ر٨٦٠٨$ ، $ص_{٣} = -٠ر٢٥٤١$

__أمثلة للحل :__ (١) حل المعادلة $س^{٣} - ٣ س^{٢} + \frac{٩}{٤} س - \frac{١}{٢} = ٠$

(٢) أثبت أن إثنين من جذور المعادلة

$$س^{٣} + ٢\,س - ٣ = ٠$$

تخيلية وأوجد قيمة الجذور الثلاث

(٣) حل المعادلة $ص^{٣} - ٢٤\,ص - ٧٢ = ٠$

الجذور ٦ ، $٤\,\omega + ٢\,\omega^{٢}$ ، $٤\,\omega^{٢} + ٢\,\omega$

(٤) حـــل المعادلـــة $ص^{٣} + ٩\,ص - ٦ = ٠$

الجذر الأول = $٣^{\frac{١}{٣}} - ١$

(١٢)

إسحاق نيوتــن

ولد نيوتن فى منتصف القرن السابع عشر بالدقة عام ١٦٤٢ - بعد وفاة جالبليو بعام واحد من عائلة من صغار الفلاحين بمقاطعة لنكولن بإنجلترا ، وقد مات والده قبل مولده وتكفلت والدته بتربيته ، وكانت معروفة فى القرية جرانثام Grantham بمزايا عديدة على عكس والده الذى كان معروفا بين جيرانه بالشراسه والإسراف . ونظرا لظروف الأسرة المالية المتواضعة فقد تزوجت والدته بعد وفاة والده وتركت الطفل فى حضانة جدته .

وقد عرف عن نيوتن فى صباه غرامه المبكر بالألعاب الميكانيكية التى يصنعها بنفسه مثل روافع المياه ونماذج الطواحين الهوائية ، وهذه القدرات المبكرة على إستخدام يديه لصناعة الآلات بنفسه قد أفادته فى المستقبل فى دراساته لظاهرة الضوء وفى إستخدام العدسات والمرايا وبناء التلسكوبات بعد ذلك لإستخدامها فى رصد الظواهر الفلكية .

ولقد قضى المرحلة الأولى من تعليمه فى مدرسة القرية ، وعندما بدأ خاله يستكشف قدراته غير العادية أقنع أمه بأن ترسل إبنها إلى كمبردج بدلا عن البقاء فى القرية كما كانت تعتزم لمساعدتها على إدارة شئون الأرض التى كانت تملكها بالقرية بعد وفاة زوجها الثانى .

والتحق نيوتن اخيرا بجامعة كمبردج بعد أن أنهى مدرسة الأجرومية فى قريته جرانثام ، وتعلم فى الجامعة من دراسة أعمال عمالقة عصره : ديكارت ، كبلر ، جاليليو . فمن ديكارت أخذ نيوتن الهندسة التحليلية ، أى الهندسة الديكارتيه الكارتيزية) .

ومن كبلر أخذ نيوتن القوانين الثلاث الأساسية لحركة الأجسام السماوية والتى إكتشفها أمبريقيا بعد إثنين وعشرين عاما من المشاهدات والحساب الفلكية المضنية .

ومن جاليليو أخذ نيوتن القانونين الأوليين من قوانين الحركة الثلاث التى أصبحت حجر الزاوية فى ديناميكا نيوتن .

ولما كانت قوانين كبلر لحركة الأجسام السماوية قد لعبت دورا حاسما فى تطوير نيوتن لقانونه عن الجاذبية الكونية Univerasal gravitation فقد يكون من المفيد ذكر هذه القوانين هنا .

١ - تدور الكواكب حول الشمس فى مسار قطع ناقص ، وتقع الشمس فى بؤرة هذه القطاعات الناقصة .

٢ - الخط الواصل بين الكوكب والشمس يمسح مساحات متساوية فى ازمنه متساوية .

٣ - يتناسب مربع زمن الدورة الكاملة لكل كوكب مع مكعب متوسط المسافة بين الكوكب والشمس وهذه القوانين الثلاث التى إكتشفها كبلر عمليا يمكن الآن برهنتها رياضيا فى صفحة أو صفحتين بإستخدام التفاضل والتكامل مطبقة

على قانون نيوتن عن الجاذبية الكونية والذى ينص على أن:

" كل جسمين يجذبان بعضهما البعض فى هذا الكون بقوة تتناسب طرديا مع كتلة كل منهما وعكسيا مع مربع المسافة بين الجسمين "

فإذا كانت كتلة الجسمين هى $ك_1$ ، $ك_2$ ، والمسافة بينهما ف فإن قوة التجاذب بينهما هى

$$م \frac{ك_1 \times ك_2}{ف^2}$$ حيث م ثابت التناسب

وبإستخدام وحدات مناسبة يمكن جعل م = ١ وتكون قوة التجاذب $\frac{ك_1 \times ك_2}{ف^2}$

والآن سنذكر قوانين نيوتن الثلاث فى الديناميكا :

١ - كل جسم يسير بسرعة منتظمة يظل مستمرا فى حركته هذه مالم تؤثر عليه قوة تغير من حاله .

٢ - معدل التغير فى عزم نقطة بادية (العزم = السرعة × الكتلة) يتناسب مع القوة المؤثرة ويكون إتجاهه فى إتجاه القوة .

٣ - كل فعل له رد فعل مساو له ومضاد فى الإتجاه .

وأهم شئ فيما يتعلق بهذه القوانين - من وجهة نظر الرياضيات - هو الجملة الواردة فى القانون الثانى ، أى " معدل التغير" ، ولما كانت الكتلة ثابتة عند نيوتن فقد كان عند نيوتن حساب

معدل تغير السرعة . ولقد كان حل نيوتن لهذه المسألة هو المفتاح السحرى لموضوع المعدلات وقياسها ، أى لموضوع حساب التفاضل . وبلغتنا المعاصرة فإن معدل تغير السرعة ع بالنسبة للزمن ن هو المعامل التفاضلى $\frac{د ع}{د ن}$.

ولقد إكتشف نيوتن بعد ذلك قواعد حساب التكامل ثم إكتشف بعد ذلك العلاقة العكسية بين حساب التفاضل وحساب التكامل.

لقد تعلم نيوتن على يد الأستاذ Barrow ، وإكتشف الأستاذ بارو بالتدريج ان تلميذه على مستوى من النبوغ يندر تكراره ، فما كان من الأستاذ إلا أنه قدم إستقالته للجامعة فى عام ١٦٦٨ تاركا كرسى الأستاذية لتلميذه نيوتن الذى كان قد حصل على البكالوريوس من الجامعة في يناير عام ١٦٦٤ م .

وفى عام ١٦٦٤ - ١٦٦٥ أصيبت إنجلترا بالوباء الكبير الذى حصد آلاف الأرواح ، وقد إستمر هذا الوباء فى العام التالى وإن كان بشكل مخفف . فى هذه الظروف أغلقت الجامعة وعاد نيوتن إلى قريته حيث قضى سنتين هناك إبتكر فيها نيوتن ماعرف بإسم طريقة (Fluxions) وهو الإسم الذى إستخدمه للتعبير عن حساب معدلات التغير أى حساب التفاضل ، كما إكتشف قانون الجاذبية الكونية ، وأثبت بالتجربة أن الضوء الأبيض يتكون من أضواء بألوان مختلفة . وكل هذا قبل أن يبلغ نيوتن الخامسة والعشرين .

ولقد سميت الطريقة Fluxion من فكرة التدفق flowing ، أى حساب معدلات التدفق .

كذلك أعاد نيوتن خلال تلك الفترة إكتشاف نظرية ذات الحدين . (لاحظ أن الحضارة العربية الإسلامية كانت قد إكتشفت تلك النظرية لأس صحيح موجب قبل ذلك بكثير كما سبق أن ذكرنا) .

ورغم أن برهان نظرية ذات الحدين لأس سالب أو كسرى لم يكتشف إلا فى القرن التاسع عشر إلا أن نيوتن كان يستخدمها فى كل الحالات دون تحفظ . ومن حسن الحظ أن الحالات التى إستخدمها فيها كانت صحيحة .

ومن المهم أن نذكر أن الدقة والإحكام فى البراهين لم تعرف حتى ظهور جاوس فى أواخر القرن الثامن عشر وأوائل القرن التاسع عشر ، فإليه أساسا يرجع الفضل فى إحكام البراهين ، وتوضيح متى تكون نظرية ما صحيحة ومتى لا تكون .

والآن نتعرض لمفهوم نيوتن عن حساب التفاضل :

إن الأفكار الأساسية الآن فى حساب التفاضل هى : المتغير ، الدالة ، النهاية . وفكرة النهاية أخذت وقتا طويلا حتى أصبحت واضحة . أما فكرة الدالة فيبدو أن ليبنتز هو الذى أدخلها عام ١٦٩٤ ، ومنذ ذلك الوقت بذلك جهود كثيرة حتى أصبحت فكرة مفهوم الدالة كراسم محددة تماما .

وسوف نتبين أنه بالنسبة للأوائل أمثال نيوتن وليبنتز كان مفهوم الدالة والنهاية حدسيا أي يقوم على الحدس . أما الآن فنحن نحدده كما يلي :

نفرض ص = د (س)

ونفرض أن زيادة في س Δ س يترتب عليها زيادة في ص Δ ص

$\therefore$ ص + Δ ص = د (س + Δ س)

أي Δص = د (س +Δ س) – د (س)

ويكون معدل التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ هو . وإذا تصورنا أن Δ س تقترب من الصفر فإن Δ ص تقترب أيضا من الصفر ، لكن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ لا تقترب من الصفر عموما بل تصبح لها نهاية هي ما نرمز له بالرمز $\frac{دص}{دس}$.

مثلا نفرض ان د (س) = س^{٢}

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(س + \Delta س)^{٢} - س^{٢}}{\Delta س} = ٢ س + \Delta س$$

وعندما تقترب س من الصفر فإن

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ تقترب من ٢ س

أى $\frac{\Delta ص}{\Delta س} \leftarrow ٢ س$

أى أن $\frac{دص}{دس} = ٢ س$

وسوف نلاحظ أن هذه الرمزية فى حساب التفاضل إنما يعود الفضل فيها إلى ليبنتز وليس إلى نيوتن .

وأقرب الأمثلة على معدلات التغير فى الفيزياء هو السرعة والعجلة ، فالسرعة هى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن ، والعجلة هى معدل تغير السعرة بالنسبة للزمن . أى أن

السرعة $ع = \frac{د ف}{د ن}$ ، العجلة هى $\frac{د ع}{د ن} = \frac{د^٢ ف}{د^٢}$

وهكذا يمكن تعريف المشتقه الثانية أو الثالثة ... إلخ

وإن كانت المشتقتان الأولى والثانية هى الأكثر أهمية عند تطبيق التفاضل على علم الفيزياء وقد إستطاع نيوتن بعد ذلك تعريف العملية العكسية للتفاضل (التكامل) والوصول إلى النظرية الأساسية فى حساب التفاضل والتكامل والتى تنص على أن المساحه تحت المنحنى ص = د (س) بين النقطتين أ ، ب تعطى بالتكامل

$$\int_{أ}^{ب} د (س) د س = ق (ب) - ق (أ)$$

حيث ق (س) هى الدالة التى لو فاضلناها أعطتنا د (س) ،

أو بمعنى آخر التكامل غير المحدود $\int د (س) دس = ق (س)$

تلك هى النظرية الأساسية فى حساب التفاضل والتكامل التى إكتشفها نيوتن كما إكتشفها ليبنتز بشكل مستقل .

عندما عاد نيوتن إلى كمبردج بعد إنتهاء الوباء إنتخب زميلا فى كلية ترينتى وفى عام ١٩٦٩ عين أستاذا لكرسى الرياضيات بعد بارو ، وبدأ فى إلقاء محاضراته عن البصريات Optics وفى هذه المحاضرات قدم نيوتن نظرية الجسيمات فى الضوء (الضوء يصدر على هيئة جسيمات فى خط مستقيم) بدلا من نظرية هايجنز الذى كان يرى أن الضوء ينتشر على شكل موجات . ورغم التناقض الظاهر بين النظريتين فقد أمكن التوفيق بينهما - من الناحية الرياضية البحته - عن طريق نظرية الكم الحديثة . ولذا فليس صحيحا تمام أن يقال اليوم - كما كان يقال من قبل - أن نيوتن كان مخطئا تماما فى نظرية الجسيمات .

وفى السنة التالية بنى نيوتن بيديه تلسكوب عاكس إستخدمه لمشاهدة الأفلاك التى تدور حول المشترى Japiter (أكبر الكواكب السيارة وخامسها من ناحية البعد عن الشمس) ، وكان هدف نيوتن من ذلك أن يرى ما إذا كانت الجاذبية هى كونية حقا عن طريق - رصد حركة الأفلاك حول المشترى .

وفى عام ١٦٧٢ إنتخب نيوتن عضوا فى الجمعية الملكية البريطانية التى كانت منشأة حديثا ، فقدم للجمعية نتائج أبحاثه عن التلسكوبات ونظرية الجسيمات فى الضوء وأثارت هذه الأبحاث

خلافات مع زملاء له فى الجمعية الملكية ، ولم يكن فى طبع نيوتن تقبل النقد بصدر رحب فقد كان معروفا بحساسيته الشديدة .

لكن السنوات ١٦٨٤ - ١٦٨٦ كانت سنوات هامة فى تاريخ نيوتن ، فقد وافق تحت ضغط الفلكى هالى Halley على أن يعد كل إكتشافاته الفلكية الديناميكية للنشر .

وأدى هذا به إلى إنجاز عمله الكبير المعروف بإسم

" المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية "

ويسمى أحيانا على سبيل الإختصار Principia Mathematica

وفى عام ١٦٨٦ قدم الكتاب إلى الجمعية الملكية الذى تولى هالى طبعه على نفقته . والجزء الأول من الكتاب يحتوى على مبادئ الديناميكا ، والثانى يحتوى على حركة الأجسام فى وسط مقاوم وحركة السوائل ، والثالث يحتوى على حركة الأجسام السماوية على ضوء قانونية الجاذبية الكونية ، وفيه إستنتج نيوتن رياضيا ما أثبته كبلر أمبريقيا، كما قدم نيوتن النظرية الهامة جدا المعروفة - بإسم نظرية التذبذب Perturbation فالقمر مثلا ليس منجذبا إلى الأرض فقط وإنما إلى الشمس أيضا ، ولذا فإن مسار القمر يتذبذب بسبب جذب الشمس .

وبعد نشر الكتاب بسنوات قليلة بدأ تدريس النظام النيوتونى فى كمبردج (١٦٩٩) ثم فى إكسفورد (١٧٠٤) . وقد تردد الرياضيون الفرنسيون فى قبول هذا النظام ، لكنهم قبلوه فى النهاية . والغريب أن

أعظم من خلف نيوتن في تطوير هذا النظام بعد ذلك كان من فرنسا وليس من إنجلترا (لا بلاس)
ويعتبر هذا العمل (المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية) هي أعظم ما في تاريخ نيوتن ، وما جاء بعد ذلك من أحداث ليس لها أهمية هذا العمل .

لقد دخل نيوتن في مشاكل السياسة البريطانية وعلاقة الجامعات بالملكية، ودخل نيوتن عضوا في مجلس العموم ، وقد تصدى نيوتن للملك جيمس الثاني الذى كان يريد أن يطوى الجامعات تحت جناحه ، وقد هرب جيمس الثاني بعد ذلك ليحل محله William of Orange وزوجته ماري ، وقد بقي نيوتن في مجلس العموم حتى حله عام ١٦٩٠ .

وفي عام ١٦٩٩ عين نيوتن مديرا لإدارة صك النقود (Master of Mint) وهي وظيفة مرتبها كبير وذات مكانة مرموقة في الحياة البريطانية .

وفي عام ١٦٩٣ سمع نيوتن لأول مره أن حساب التفاضل والتكامل أصبح معروف تماما في القارة الأوربية وأن الفضل ينسب عادة إلى ليبنتز .

وهكذا بدأت المعركة بين أنصار نيوتن وأنصار ليبنتز وتحولت إلى مشاعر وطنية فوقف الشعب الإنجليزى خلف نيوتن متهما ليبنتز بأنه لص وكاذب والحقيقة أن سلوك نيوتن في هذه المعركة لم

يكن نظيفا . ولقد إنتهت المعركة تاريخيا بالتثبت بأن كلا من نيوتن وليبنتز قد وصل إلى نتائجه بشكل مستقل عن الآخر ، وإن كان ليبنتز قد سبق نيوتن في النشر بنحو عشرين عاما .

وقد إنتخب نيوتن رئيسا للجمعية الملكية البريطانية عام ١٧٠٣ ، وفي عام ١٧٠٥ منحته الملكة آن لقب فارس فأصبح سير إسحاق نيوتن . وقد أعيد إنتخابه رئيسا للجمعية الملكية حت وفاته عام ١٧٢٧ حيث دفن في مقابر العظماء (ويست منستر آبي) Westminister Abbey .

(١٣)

كارل فريدريك جاوس

(أمير الرياضيين) (١٧٧٧م - ١٨٥٥م)

ارشميدس ، نيوتن ، جاوس هؤلاء الثلاثة طراز وحده بين الرياضيين العظام . فالثلاثة كانوا البادئين بموجات جديدة في الرياضة البحته والتطبيقية : في حالة أرشميدس كان له العديد من التطبيقات والإقتراحات في مجال الروافع والكثافة النوعية ... إلخ ومع ذلك فقد كان يرى أن بحوثه في الرياضة البحته اعلى قدرا من جميع مخترعاته . ونيوتن كان يرى أن المبرر الرئيسي لإكتشافاته في الرياضة البحته (علم التفاضل والتكامل) هو تطبيقاتها ، بينما أعلن جاوس أنه سيان بالنسبه إليه أن يبحث في مجال الرياضه البحته أو التطبيقية ، وقد صرف جاوس عشرين سنه من عمره في حساب مسار أحد الكواكب في علم الفلك ، وثبت بعد ذلك بالمشاهدة أن المواقع التي حددها لمسار الكوكب كانت دقيقة تماما . ورغم ذلك فإن درة أعمال جاوس هي إكتشافاته في علم الحساب العالي ، وهو فرع في عصره كان له اقل التطبيقات .

ولد جاوس في الثلث الأخير من القرن الثامن عشر ومات في حوالي منتصف القرن التاسع عشر (ولد ١٧٧٧ م ومات ١٨٥٥م) في برونزفيج (ألمانيا) من أبوين فقيرين . كان جده فلاحا فقيرا إستقر في برونزفيج

وعمل بستانيا ، وأنجب والد جاوس (جيرهارد) الذى عمل هو بدوره بستانيا ومطهر ترع وصانع لقوالب الطوب . وكان والد جاوس رجلا مكافحا حازما مع اولاده إلى حق القسوة أحيانا . لذلك عمل كل مافى وسعه لكى ينضم إليه اولاده فى العمل دون سلوك طريق التعليم . ولكن جاوس مضى فى طريق التعليم بفضل امه وعائلتها التى كانت تدرك أهمية التعليم كطريق للحراك الإجتماعى ، وعلى وجه الخصوص خاله فردريك الذى لعب دورا هاما فى تشجيعه على التعليم وفى تذليل الصعاب التى واجهت جاوس .

ولم ينس جاوس فضل أمه عليه ، فالإثنان والعشرون سنه الأخيره من حياتها قضتها فى منزل جاوس بعد زواجه ، وكان جاوس يصر على أن يقوم بخدمتها بنفسه - خصوصا بعد أن أصابها العمى - وكان يتولى تمريضها وإعطائها الدواء إلى ان ماتت عام ١٨٣٩ .

ظهر نبوغ جاوس فى مرحلة مبكرة جدا من حياته ، وهو فى الثالثة من عمره فيحكى أنه فى أحد أيام السبت كان والده يجرى حسابات اجور العمال الذين يشرف عليهم ، ودون إنتباه إلى أن إبنه يتابع العمليات الحسابية التى كان يجريها بصوت عال فوجئ الأب بإبنه يقول له إن فى حساباته خطأ وأن الرقم الصحيح هو .. كذا . وراجع الأب حساباته ليجد أن ما قاله الإبن هو الصحيح .

وفى المدرسة الإبتدائية أظهر نبوغا واضحا ايضا . فعندما كان المدرس يكلف التلاميذ بإجراء عمليات جمع لمتتابعات حسابية ، إذ به يجد أن جاوس كتب الإجابة فور كتابة السؤال على السبورة .

وهكذا نشأت صداقة حميمة بين الطفل جاوس ومساعد المدرس (بارتلز) (Bartels) الذى كان من عشاق الرياضيات . وأخذ الإثنان يدرسان معا ويساعدان بعضهما البعض ، ويتحققان معا من صحة براهين المسائل التى كانا يبحثان حلها .

من هذا العمل المبكر نشأت بعض إهتمامات جاوس طوال حياته . لقد أجاد إستخدام نظرية ذات الحدين عن مفكوك $(١+س)^{ن}$ ، حيث ن ليس بالضرورة عدد صحيح موجب

$$(١+س)^{ن} = ١ + \frac{ن}{١}س + \frac{ن(ن-١)}{١\times٢}س^{٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١\times٢\times٣}س^{٣} + ...$$

فى حالة ن ليست عددا صحيحا موجبا فإن هذه المتسلسلة لانهائية .

ولذا فقد بدأ لجاوس أن من الضرورى فرض شروط على قيمة س فى هذه الحالة حت نضمن أن تكون المتسلسلة قريبة من نهاية معينة ، وإلا إكتشفنا أن المتسلسلة تعطى سخافات غير مقبولة .

مثلا إذا أخذنا س = -٢ ، ن = -١ فإن الطرف الأيمن فى المفكوك يعطى $(١-٢)^{-١} = -١$

بينما الطرف الأيسر يعطى ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ...

وطبعا ليس ن المقبول أن يكون مجموع أعداد صحيحة موجبة هو عدد سالب .

قبل أن يفكر جاوس في هذه المسألة : متى تتقارب متسلسلة مثل ذات الحدين لأس غير صحيح وموجب ، لم يهتم التحليليون ببحث هذه المسألة بهدف تفسير السخافات والألغاز التي تنتج عن الإستخدام غير الحذر للمتسلسلات اللانهائية .

وهكذا وضع جاوس شرطا دقيقا لتقارب متسلسلة ذات الحدين وبرهن عليه (هذا الشرط هو | س | < ١) .

والمثير أن جاوس كان أول المدققين Rigorists في مجال التحليل الرياضي. وقد غير هذا الجهد من كل جوانب الرياضيات بعد ذلك . فكل المحللين الكبار قبل جاوس مثل نيوتن وليبنتز وأويلر ولاجرانج ولابلاس لم يكن لديهم أي تصور عن البرهان الصحيح في العمليات اللانهاية .

إن الدقة التي فرضها جاوس على علم التحليل الرياضي قد خيمت منذ ذلك العصر على الرياضيات ، وأثرت تأثيرا عميقا في معاصري جاوس (آبل ، كوشي) وعلى خلفائه (فيشتراس ، Dedekin) فالرياضيات بعد جاوس أصبحت مختلفة تماما عن رياضيات نيوتن وأويلر ولاجرانج .

وبهذا المعنى فإن جاوس قد أحدث ثورة في العلوم الرياضية ، بمعنى أنه نقلها نقلة مختلفة كيفيا عما سبقها .

لم يكتف بارتلز (مساعد المدرس الذى أصبح صديقا حميما لجاوس) بمساعدة جاوس في حل ألغاز علم الجبر ، بل إنه ساعده عن طريق آخر. فقد كان بارتلز على صلة ببعض ذوى النفوذ الذين أقنعهم بنبوغ جاوس . فقام هؤلاء بلفت نظر دوق برونزفيك (الدوق كارل فرديناند) إلى تلك المسألة . وهكذا إستقبل الدوق جاوس لأول مره عام ١٧٩١ م ، وكان عمر جاوس ١٤ سنة ، واقتنع بنبوغه . وهكذا احتضنه الدوق وتكفل بتغطية نفقات تعليمة ومعيشته بعد ذلك .

وكان جاوس متفوقا أيضا في اللغات ، ميالا بشدة إلى الفلسفة .

وقد تعلم في كلية كارولين حيث درس أعمال أويلر ولاجرانج ونيوتن . وبينما كان جاوس لا يزال تلميذا في الكلية بدأت أبحاثه في علم الحساب العالى ، وهى الأبحاث التى خلدته وأدخل لأول مره فهوم التطابق congruence في علم الحساب ونعرفه كما يلى :

إذا كان الفرق ا-ب أو ب-ا لعددين ا ، ب يقبل القسمة دون بواقي على عدد م قبل أن ا ، ب متطابقان بالنسبة للمقياس م modulus وتكتب هكذا

ا ≡ ب (مق م) $a = b \ (mod \ m)$

مثلا ١٠٠ = ٢ (مق ٧) أو $35 = 2 \ (mod \ 11)$

وهكذا وميزة هذه الفكرة أنها تحصر مفهوم القسمة " الزئبقى" فى

رمزية محددة ، وتساهم فى أن تنقل إلى علم الحساب بعض العمليات التى تقود إلى نتائج مميزة فى علم الجبر .

مثلا : نفرض x تشير إلى عدد مجهول ، r , m أعداد معلومة حيث r غير قابل للقسمة على m هل هناك حل للمعادلة

$$x^2 = r \ (mod\ m\ )$$

إذا كان هناك عدد x يحقق هذه المعادلة فإن r يقال له الباقى التربيعى quadratic residue للعدد m .

وإذا لم يكن هناك عدد x يحقق هذه المعادلة قيل إن r هو اللاباقى التربيعى qudratic non-residue لعدد م .

مثلا هل 13 باقى تربيعى للعدد 17 ؟

نعم إذا كان من الممكن حل المعادلة $x^2 = 13 \ \ (mod \ \ 17)$

إذا حاولنا $x = 1,2,3,..$ فسوف نجد أن $x = 8,25,42,..$ كلها حلول أى أن $8^2 = 13 + 3 \times 17$ ، $25^2 = 625 = 13 + 36 \times 17$ ، وهكذا ...

لكن لا يوجد حل للمعادلة $x^2 = 5 \ (mod\ 17)$

من الطبيعى أن نتساءل : إذا علم m فى $x^2 = r \ (mod\ m)$ ، ما هى الأعداد r الممكنة وغير الممكنة عندما نأخذ x القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

ومن الممكن إثبات أنه يكفى طرح هـذا السـؤال إذا كـان r,m أعداد أوليه . وعلى هذا يمكن طرح السـؤال علـى النحـو التـالى : إذا كان p عددا أوليا معطى فأى عدد أولى q يجعل المعادلة $x^2 = q \bmod (p)$ قابلة للحل ؟

هذا السؤال صعب ومازال بدون حل حتى اليوم . ولكن مع ذلك أمكن لجاوس أن يكتشف علاقة تعاكسية جميلة بين زوجى التطابق

$$x^2 = q \pmod p \qquad , \qquad x^2 = p \pmod q$$

حيث q , p عددان أوليان .

وتنص هذه النظرية على أن هذين التطابقين قابلان للحل معا أو غير قابلين للحل معا ، إلا إذا كان الباقى بعد قسمة كل من p , q على أربعة هو ٣ . وفى هذه الحالة فأن لاحـد التطـابقين حـل وليس للآخـر حل .

هذا القانون يعرف بإسم قانون التعاكس التربيعى Law of quadratic receprocity . ولم يكن هذا القانون سهلا فى برهانه ، لقد استعصى على أويلر ولاجندر ، لكن جاوس أعطى أول برهـان له وهو فى التاسعة عشر من عمره .

<u>مثال عددى :</u>

(أ) إعتبر كلا من $x^2 = 13 \pmod 5$, $x^2 = 5 \pmod{13}$

عند القسمة على أربعة فإن باقى ٥ ، ١٣ هو ١ . وعلى هذا فحسب النظرية السالفة فإن التقريرين إما قابلان للحل معا أو غير قابلين للحل معا.

والحقيقة أنهما غير قابلين للحل .

(ب) أيضا الباقي عند قسمة ١٣ ، ١٧ على أربعة هو ١ . إذا فإن التطابقين

$$x^2 = 13 \ (mod\ 17)\ ,\ x^2 = 17 \ (mod\ 13)$$

إما قابلين للحل معا أو غير قابلين للحل معا .

والحقيقة أنهما قابلان للحل

فالتطابق الأول حلوله ٨ ، ٥ ، ٤٢ ، ...

والثاني حلوله ٢ ، ١٥ ، ٨ ، ...

(جـ) إعتبر $x^2 = 19 \ mod\ (11)\ ,\ x^2 = 11 \ mod\ (19)$

عند قسمة 19,11 على 4 فإن الباقي هو ٣ ، على هذا فأحد التطابقين قابل للحل والآخر لا حل له وبالفعل الأول غير قابل للحل . أما الثاني فحلوله $x = 7, 26, 45, \ldots$

عندما ترك جاوس كلية كارولين في اكتوبر ١٧٩٥ لدخول جامعة جوتنجن (وكان لا يزال مترددا بين دراسة الرياضيات او دراسة الفلسفة) كان قد إبتكر طريقة المربعات الصغرى التي لا تزال حتى اليوم من الأدوات الأساسية لعلم الإحصاء ، وكان هذا العمل هو بداية إهتمام جاوس بنظرية أخطاء المشاهدات ، وأدى هذا به إلى

إقتراح التوزيع الطبيعي (توزيع جاوس) للتعبير عن أخطاء المشاهدات ، ومايزال هذا التوزيع حتى اليوم يعتبر أهم التوزيعات الإحصائية .

ويعتبر مارس ١٧٩٦ بداية نقطة التحول فى مستقبل جاوس. ففى هذا التاريخ وقبل شهر واحد من عيد ميلاده العشرين إتخذ جاوس قراره لصالح الرياضيات وإن بقيت دراسة اللغات هواية عمره لكن الفلسفة فقدته نهائيا .

ولقد قضى جاوس خريف عام (١٧٩٨) - وكان عمره ٢١ سنة- فى برونزفيك يضع اللمسات الأخيرة لمؤلفه العظيم " بحوث حسابية" Arithmatical Reserches وإن كان الكتاب لم ينشر إلا عام ١٨٠١ نتيجة بعض الصعوبات فى مطابع ليبزج ، وقد اهدى جاوس هذا الكتاب إلى دوق برونزفيك الذى تكفل بمساعته ماليا حتى حصوله على الدكتوراه من جامعة هلمشتد Holmstedt

(وموضوعها برهان جديد للنظرية الأساسية لعلم الجبر وتنص على أن: كل معادلة جبرية فى مجهول واحد س لها جذر) فقد برهن جاوس على أن كل جذور المعادلة الجبرية هى من نوع أ + ت ب ، حيث ت^{٢} = -١ . وكان جاوس أول من أعطى الأعداد المركبة تفسيرا هندسيا فى المستوى .

ويعتبر كتاب " بحوث حسابية" واحدا من القمم الرياضية ، ومازال البعض يعتقد أنه أعظم أعمال جاوس ، وربما كان هذا العمل آخر أعماله فى الرياضه البحته المستقلة .

بعد نشر هذا المؤلف إتجه جاوس لتوسيع نطاق بحوثه ليشمل الفلك، والمغناطيسية الكهربية ، وباقى فروع الفيزياء الرياضية وإن ظل الحساب هو حبه الأول . وسنعطى هنا فكرة موجزة عن محتويات هذا المؤلف (بحوث حسابية).

فهو يشمل مناقشة تفصيلية للتطابق ذى الحدين $x^n = A \pmod p$ حيث الأعداد n , A أعداد إختيارية وحيث p عدد صحيح أولى معلوم ، x هو العدد الصحيح المجهول . وفى هذا الكتاب يقدم نظرية البواقى التربيعية وأول برهان لقانون التعاكس التربيعى بإستخدام الإستنتاج الرياضى .

وفى أجزاء أخرى من الكتاب يناقش جاوس نظرية الصيغ التربيعية الثنائية binary quadratic forms ، وتتعلق بالبحث عن حلول صحيحه (أعداد صحيحة) لـ y , x فى المعادلة

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 = m$$

حيث a,b,c,m أعداد صحيحة معلومة

وفى البحث الأخير لهذا الكتاب يطبق جاوس النتائج السابقة فى مناقشة المعادلة

$$x^n = 1$$

حيث n عدد صحيح مجمعا الحساب والجبر والهندسة فى نموذج واحد

<u>لاحـظ :</u> أن المعادلـة $x^n = 1$ هـى الصياغـة الجبريـة للمسـألة الهندسية عن كيفية تقسيم محيط دائرة إلى ن من الأقسام المتساوية .

وأخيرا نود الإشارة فى هذا القسم إلى أن بعض نتائج هذا الكتاب كانت مكتشفه من قبل على يد فرمات وأويلر ولاجرانـج . لكـن عبقريـة جـاوس تبدو فـى انـه عـالج كـل هـذه المسائل ضمـن منهجيـة واحدة فخرجت كل النتائج الجزئية بشكل سهل وطبيعى ، فمثلا كـان فرمات قد برهن على أن كـل عـدد أولـى علـى صـوره ٤ ن + ١ هـو مجموع مربعين ، وإن كان برهانه صعبا ومطولا ، مع أن هذه النظريـة بدت مـن خلال معالجـة جـاوس للصيغ التربيعية الثنائيـة أمرا طبيعيا وسهلا .

ومعنـى هـذا كله أن جـاوس أعطـى بحـوث الحسـاب توجهـا جديدا بعد أن كان مجموعـة مـن النتائج المتفرقة ، وهكـذا أصبحـت نظريـة الأعـداد فرعـا رياضيـا يقـف علـى قـدم المسـاواه مـع الجـبر والتحليل ... إلخ

الإنجـاز العظيم الثانى لجـاوس هـو فى علم الفلـك فـى أول القـرن التاسع عشر . ففى ذلك الوقت كانت الكواكب المعروفة لدى العلمـاء سبعة – وهـو مـا إعتقـد الفلاسفة أنـه العـدد الصحيـح – لكـن الفلكيـين

أخذوا يبحثون فى السماوات عن كواكب أخرى ضمن العائلة الشمسية . وقد إكتشف أحدهم فى أول القرن التاسع عشر بإستخدام التلسكوب كوكبا جديدا يدعى Ceres وهو أول واحد من مجموع كواكب ثانوية معروفه اليوم .

ومن المفارقات الغريبة أن تصادف هذا الحدث مع نشر مقال للفيلسوف الألمانى الكبير هيجل يتضمن هجوما ساخرا على الفلكيين لقيامهم بالبحث عن كوكب ثامن مع انه " لو منح الفلكيون الفلسفة بعض الإهتمام لرأوا على الفور ان هناك سبعة كواكب فقط : لا اكثر ولا اقل "

لكن إكتشاف Ceres كان صفعة لهيجل والفلاسفة الذين ساندوه فى رأيه، وإن كان هذا الإكتشاف قد أساء إلى الرياضيات . إذ شغل جاوس بحساب مساره وقضى فى هذا سنوات عده بلغت العشرين (تذكر أن أعمال نيوتن فى "الميكانيكا السماوية" كانت النموذج عند باحثى ذلك الزمان) . ولم يكن سيرس وحده مسئولا عن إنقطاع جاوس لهذا العمل . فالحقيقة أن والده وأصدقائه كانوا يلحون عليه بالقيام بعمل "مفيد" يدخل به السعادة إلى قلب دوق برونز فيك الذى تكفل برعايته مالية . فهاهو كوكب جديد فى موقع فى السماء يجعل حساب مساره أمرا صعبا . فلماذا لا يقوم بذلك ؟

وفى عـام ١٨٠٩ نشر جاوس جوهرته الثانية "نظرية حركة الأجسام السماوية فى قطاعات مخروطية" . وجاء الإعتراف الدولى بجاوس كأحد القمم إثر هذا النشر.

سأل العالم الرحاله المشهور فون هامبولت الرياضى الفرنسي لابلاس : من هو أعظم رياضى فى ألمانيا فى رأيه ؟ فإجاب بلاس : فاف Pfaff . فقال فون هومبلت : ولكن ماذا عن جاوس ؟ فقال لابلاس : جاوس هو أعظم رياضى فى العالم .

العقد الذى تلا إكتشاف مسار سيرس Ceres كان مليئا بالسعادة والأسى. لقد تزوج جاوس فى اكتوبر ١٨٠٥ وأنجب من زوجته ثلاثة أطفال . لكن زوجته ماتت بعد سنوات أربع إثر ولادة ، فتزوج بعد ذلك صديقة لزوجته حتى تربى الأطفال وأنجب من زوجته الجديدة ولدان وبنت .

ولقد تصادف هذا مع هزيمة الدوق فرديناند على يد نابليون الذى أخذ يزحف على ألمانيا ويستولى على أجزاء واسعة منها . وفرض نابليون غرامة على كل ألمانى لدعم الجيش الفرنسى ، وكان على جاوس أن يدفع ٢٠٠٠ فرنك وهو ما لايستطيعه خصوصا بعد هزيمة راعيه . وحاول لابلاس أن يدفع المبلغ نيابة عن جاوس لكن هذا رفض وقام بسداد المبلغ . وبعد ذلك قام معجب مجهول فى فرانكفورت بسداد المبلغ نيابة عن جاوس وإضطر للقبول.

ويعتبر العام ١٨١١ نقطة تحول فى مسار جاوس العلمى . فقط حقق جاوس إكتشافا جديدا أسر به إلى بسل Bessel يتعلق بالدوال التحليلية ذات المتغير المركب .

ففى رسالة جاوس إلى بسل يقول إنه إكتشف "النظرية الأساسية فى هذا الميدان الواسع من ميدان الدوال المركبة" ، وهى النظرية التى إكتشفها أيضا كل من كوشى ونيشتراس بشكل مستقل ، وتنص على أنه إذا كانت الدالة $f(z)$ منتظمة على كل نقطة على وداخل المنحنى المغلق C وكانت $f(z)$ متصلة على كل نقطة على وداخل C فإن $\int_c f(z)\, dz = 0$ ، وكانت هذه النظرية هى فاتحة علم جديد هو علم نظرية المتغير المركب .

وفى عام ١٨١٢ نشر جاوس واحدا من أعظم أعماله عن المتسلسلة فوق الهندسية Hppergeometric series وهى

$$y=1+\frac{ab}{1!c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^{2}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(cb+2)}{3!c(c+1)(c+2)},x^{3}+\ldots$$

هذا البحث كان علامة فارقه ، وفيه يحدد جاوس القيود التى ينبغى فرضها على الأعداد a,b,c حتى تتقارب المتسلسلة . وأهمية هذه المتسلسلة أنها تتضمن العديد من المتسلسلات الهامة المعروفة عندما تأخذ a,b,c قيما مميزة مثلا الدالة اللوغاريتمية والدوال المثلثه

وغيرهما من الدوال التى تظهر بكثرة فى الفلك والطبيعة النظرية ، وكذلك متسلسلة ذات الحدين هى حالة خاصه من هذه المتسلسلة العامة . مثل حالة $b = c$ تعطينا $y=(1-x)^{-a}$ ، وحالة $c = 2 , a = b = 1$ تعطينا $y = \frac{1}{n} \log(1-x)^{-1}$ وهكذا .

وقد بدأ جاوس فى أواخر حياته يشكو من تضخم القلب وإنهاك النفس ، ثم إخذت تظهر عليه علامات "الإستسقاء" ومات فى فبراير سنة ١٨٥٥ فى الثامنة والسبعين من العمر .

ملاحظات أخيرة :

(١) دالة الخطأ (التوزيع الطبيعى القياسى) هى

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad 1 - \infty < x < \infty$$

حيث $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(٢) المعادلة التفاضلية فوق الهندسية هى

$$x(1-x)\, y'' + \{ \gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x \}\, y' - \alpha \beta y = 0$$

ولها حل الذى يعطى المتسلسلة فوق الهندسية

$$y=1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots\infty$$

(٣) النظرية الأساسية لعلم الجبر لها صورتان

(أ) كل معادلة جبرية لها جذر .

(ب) كثيرة الحدود .

$$a_0 z^m + a_1 z^m + \ldots a_m$$

لها بالضبط m من الجذور داخل الدائرة $R = |z|$ باختيار R كبيرة كبرا كافيا .

ونبرهن هذه النظرية اليوم باستعمال نظرية روشى Rouche' للمتغير المركب التى تنص على أنه إذا كانت $q(z)$, $f(z)$ منتظمتين على وداخل منحنى مغلق c وكان

$$|g(z)| < |f(z)|$$

على نقط المنحنى c فإن $f(z)$, $f(z) + g(z)$ لهما نفس عدد الجذور داخل c

(١٤)

هنرى بوانكريه (١٨٥٤ -١٩١٢) آخر التجميعيين

من النادر أن تجد رياضيا له المعرفة الواسعة بكل فروع الرياضيات فى عصره مثل بوانكريه ، ومن الأندر أن تجد رياضيا له الإلمام العريض بالفلسفه العلمية مثل بوانكيره . كما أن من النادر أن تجد رياضيا له هذا الأسلوب المتميز والعرض الواضح فى كتاباته ، حتى أن الأكاديمية الأدبية فى فرنسا منحته شرف العضوية بها، وهو أمر يندر أن يحدث بين العلماء . والسبب هو إسلوبه الممتاز فى كتاباته العلمية الشعبية الموجهه لغير المتخصصين .

ولد هنرى بوانكيره عام ١٨٥٤ من عائلة ميسورة وكان والده إستاذا بكلية الطب ، وكان إبن عمه ريموند يدرس القانون وإشتغل بالسياسة حتى وصل إلى أن يكون رئيس جمهورية فرنسا خلال الحرب العالمية الأولى . ولم يكن لدى هنرى إهتمام لا بالإدارة ولا الأمل فى المناصب الكبرى . وبسبب عناية أمه المستمره به كان تلميذا متفوقا فى صغره .

لكنه فى سن الخامسة إصيب بالدفتريا ، وأدى هذا إلى شلل فى حنجرته دام تسعة شهور . وبالطبع أثر هذا المرض عليه وجعله طفلا ضعيفا وخجولا ، لكنه دفعه أيضا إلى الإعتماد على موارده الداخلية وبدلا من اللعب مع الأطفال أدمن القراءة منذ الصغر . وبسبب هذا

المرض أيضا لم يكن بوانكيره قادرا على إستخدام أصابعه بمهارة ، ولذا كره الدروس العمليه خلال دراسته بعد ذلك .

ولو كان لبوانكريه نفس القدرات في البحوث العملية التي أظهرها في البحوث النظرية ، لكان الرابع على القمة إلى جانب الثلاثه العظام: أرشميدس ونيوتن وجاوس .

كان أداء بوانكيره في المدرسة الإبتدائية رائعا ، وإن كان حتى ذلك السن لم يظهر إهتماما خاصا بالرياضيات ، وإنما كان ولعه بالتاريخ الطبيعي وعلوم الحيوان ، ولم يظهر ولعه بالرياضيات إلا في فترة البلوغ (حوالي ١٥ سنة) أو قبل ذلك بقليل . ومنذ أول لحظة بدت له خصوصية نادرة طول حياته . فالرياضيات تتم في ذهنه بينما هو يتريض بنشاط ، ولا يبدأ الكتابه على الورق إلا عندما يكون كل شئ قد حل في ذهنه تماما . وفي فترة تاليه من حياته كان يكتب مذكراته الرياضية دفعة واحدة دون مراجعة لما كتب .

في عام ١٨٧١ (وكانت الحرب بين فرنسا وبروسيا على أشدها) حصل وهو في سن السابعة عشر على أول درجة في الآداب والعلوم ، ثم تقدم لإمتحان القبول بمدرسة الغابات فأدهش زملائه بحصوله على الجائزة الأولى في الرياضيات دون أن يكون قد إهتم بكتابة محاضرات الأساتذه .

وفي نهاية السنة الأولى إنتقل إلى مدرسة البوليتكنيك Ecole Polytechnique وأظهر مقدره فائقة في الإجابه على أسئلة

إمتحان القبول وفي هذه المدرسة تميز بوانكيريه بتفوق في الرياضيات وبعجزه الفاضح في التدريب البدني والعسكري الذي كان سائدا بالمدرسة ، وبضعفه الواضح في مادة الرسم . وعندما أنهى الدراسة بالبوليتكنيك عام ١٨٧٥ دخل مدرسة المناجم بهدف أن يكون مهندس مناجم ، لكنه بعد ثلاث سنوات قدم لكلية العلوم في باريس رسالة في المعادلات التفاضلية للحصول على الدكتوراه في العلوم الرياضية . وقد قال الاستاذ داربو الذي كلف بفحص الرسالة أنها رسالة غير عادية ، لكن هناك نقاط تحتاج إلى تصحيح أو شرح . ذلك أن بوانكيره كان في عمله حدسيا ولم يكن يهتم بمراجعة أي عمل يقوم به .

وفي أواخر عام ١٨٧٩ حصل بوانكيره على أول وظيفة أكاديمية كأستاذ للتحليل الرياضي في جامعة كين . وبعد سنتين (وكان عمره ٢٧ سنة) رقي إلى وظيفة الأستاذية في جامعة باريس . ومنذ تلك اللحظة حتى وفاته قدم بوانكيره ٥٠٠ بحثا علميا في رياضيات جديدة ، وألف أكثر من ثلاثين كتابا تغطي عمليا كل فروع الرياضيات والفيزياء النظرية والفلك النظري . هذا غير كتبه الكلاسيكية عن فلسفة العلم وكتاباته العلمية الشعبية .

ولقد كانت أول نجاحات بوانكيره في المعادلات التفاضلية ، التي كانت آنذاك شديدة الأهمية في الفيزياء النظرية والفلك النظري . وقد أدت نجاحاته هذه عام ١٨٨٠ عندما كان هو في السادسة والعشرين إلى واحدة من أعظم إكتشافاته ، وهي تعميم للدوال الناقصية Elleptic

fanctions التي هي تعميم للدوال المثلثية (الجيب ، وجيب التمام) . فللدوال الثلاثية (جا ، جتا) دورة مقدارها ٢ ط ، أي أن الدالة تعود إلى قيمتها بعد فترة ٢ ط . أي أن جا (ع + ٢ط) = جا ع وفي الدالة الناقصية ق (س) تكون هناك دورتان متمايزتان $م_١$ ، $م_٢$ بحيث

$$ق (ع + م_١) = ق (ع) \quad ، \quad ن (ع + م_٢) = ق (ع)$$

وجد بوانكيره أن هذه الدورية Periodicity ليست إلا حالة خاصه لصفة أكثر عمومية: فقيمة بعض الدوال تعود إلى أصلها عندما يستبدل المتغير ع بأي واحد من عدد لا نهائي (وإن كان قابلا للعدد) من التحويلات الكسرية Transformations Fractional وأن كل هذه التحويلات تكون زمرة group .

وللتوضيح :

نستبدل ع بـ $\frac{اع + ب}{جع + د}$. اكتشف بوانكيريه أنه لعدد لا نهائي من مجموعة قيم ا ،ب ، جـ ، د هناك دوال مثل ل (ع) بحيث أن ل

$$ل \left(\frac{اع + ب}{جع + د}\right) = ل (ع)$$

والأكثر من ذلك أنه إذا كانت $ا_١$ ، $ب_١$ ، $جـ_١$ ، $د_١$ ، $ا_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$ ، $د_٢$ هما أي مجموعتين من قيم ا ، ب ، جـ ، د . وإذا غيرت

ع بـــ $\frac{أ_{1}ع + ب_{1}}{ج_{1}ع + د_{1}}$ ، ثــم فــي هــذه التحويــلات غــيرت ع إلى

$\frac{أ_{2}ع + ب_{2}}{ج_{2}ع + د_{2}}$ للحصول على $\frac{\hat{أ}ع + \hat{ب}}{\hat{ج}ع + \hat{د}}$ فإننا نحصل ليس فقط على

$$ل\left(\frac{أ_{1}ع + ب_{1}}{ج_{1}ع + د_{1}}\right) = ل(ع) \quad ، \quad ل\left(\frac{أ_{2}ع + ب_{2}}{ج_{2}ع + د_{2}}\right) = ل(ع)$$

بل نجد أيضا أن

$$ل\left(\frac{\hat{أ}ع + \hat{ب}}{\hat{ج}ع + \hat{د}}\right) = ل(ع)$$

والأكثر من هذا أن مجموعة التعويضات

$$ع \leftarrow \frac{اع + ب}{جع + د}$$ (السهم يعنى غيرت إلى)

التى لا تغير قيمة الدالة ل (ع) تكون زمرة group .

وباختصار نقول : الدالة ل (ع) هـى دالة غير متغيرة invariant تحت تأثير زمرة لا نهاية العدد (وإن كـانت قابلـة للعـد) مـن التحويـلات الكسرية الخطية .

F(z) is invariant under an infinite group of linear fractional transformations

والدوال التى لها هـذه الخاصية تسمى (ذاتية التشكل) automorphic functions. وقد نجح بوانكريه فى سلسلة من البحوث فى تركيب هذه الدوال وتطوير أهم خواصها .

ويلزم هنا إبراز ملاحظتين هامتين لتوضيح أهمية إكتشابات بوانكريه:

الأولى : هى أن بوانكريه قد أثبت لأول مره أن الدوال الناقصية هى حالة خاصه من نظرية عامه .

والثانية : هى ما قاله الرياضى الفرنسى هامبير Humbert عندما ذكر أن بوانكريه بتقريريه (التاليين) قد أعطانا مفاتيح عالم الجبر Algebraic Cosmos . وهذان التقريران ينصان على :

(١) كل دالتين أوتومورفيك غير متغيرتين تحت نفس المجموعة تربطهما معادلة جبرية .

(٢) وبالعكس فإن إحداثيات أى نقطة على منحنى جبرى يمكن التعبير عنها بدلالة دوال أتومورفيك وبالتالى دوال منتظمة (غير متغيرة) ذات معلمة (بارامتر) واحدة .

للتوضيح المنحنى الجبرى هو المنحنى الذى . معادلة ق (س ، ص) = ٠ حيث ق (س ، ص) كثيرة حدود فى س ، ص مثلا معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها أ هى

$س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢}$

وحسب مفاتيح بوانكريه لابد أن يكون من الممكن التعبير عن س ، ص كدالتين أوتومورفينيه بدلالة بارامتر واحد .

وهذا صحيح فالتعبير هو س = أ جتا θ ، ص = أ جا θ .
وبالتربيع : نجد $س^2 + ص^2 = أ^2$. ولكن الدوال المثلثية هي حالة خاصه من الدوال الناقصية التي هي بدورها من الدوال الأرتومورفيك ، إن إبتكار هذه النظرية الضخمة عن الدوال الأوتومورفيك هو واحد من أعمال مدهشة كثيرة إكتشفها بوانكريه قبل بلوغه سن الثلاثين .

وفي سن الثانية والثلاثين إنتخب بوانكريه عضوا في الأكاديمية الفرنسية ، وقد تحول بوانكريه من قضايا الرياضة البحته إلى قضايا الفلك النظرية . فمنذ زمن نيوتن كانت هناك مسائل عديدة في الفلك الرياضي لم تحل وحتى أواخر القرن التاسع عشر لم تكن الأسلحة المستخدمة في معالجة هذه المسائل إلا تحسينا لما وصل إليه نيوتن . لكن خلال القرن التاسع عشر تطورت العديد من فروع البحته خصوصا نظرية الدوال المركبة والسلاسل اللانهائية ولذا إتجه بوانكريه إلى معالجة قضايا الفلك الرياضي مستخدما هذه الأسلحة الجديدة . ولذا عالج المسألة التالية : نتصور ن من الأجسام موزعة في القضاء بأي طريقة حيث الكتل معلومة والمسافات البينية معلومه . إذن تتجاذب هذه الأجسام وفق قانون نيوتن في الجاذبية . والآن إذا إستبدلنا هذه الأجسام بكواكب فالسؤال : كيف تصبح حركة السماوات بعد سنه أو بعد بليون سنه ؟

بالطبع هناك تغيرات لم يأخذها الرياضيون فى حسبانهم مثل الإشعاع وأن كتل الكواكب لا تظل ثابته على مر السنين . لكن حل المشكلة لـ ن من الأجسام قد يعطينا إجابة كافية فى الظروف الحاضرة . لاحظ أن حالة ن = ٣ هى أهم حالة بالنسبة لنا بإعتبار أن الأجسام الثلاثه هى الشمس والأرض والقمر .

لقد أعلن ملك السويد عن جائزة كبرى فى عام ١٨٨٧ لحل هذه المسألة. وتقدم بوانكريه للحصول على الجائزة . ورغم أن بحوثه لا تمثل حلا كاملا للمسألة لكنه فتح ببحوثه فصلا جديدا فى علم الميكانيكا السماوية . ولهذا منح الجائزة .

خلال العقد الأول من القرن العشرين تزايدت شهرة بوانكيره ، بحيث أصبح ينظر إليه كأهم رياضى فى العالم فى زمنه .

وكان بوانكريه من أشد المعارضين لفكرة أن كل الرياضيات يمكن إعادة كتابتها بدلالة الأفكار البسيطة للمنطق (رسل) . ففى رأى بوانكريه هناك شئ فى الرياضيات اكثر من المنطق هو الذى يجعلها كما هى معروفه . وربما كان يعتقد مثل المدرسة الحدسية أن الرياضيات سابقة على المنطق . وإذا كان لابد أكثر من إشتقاق واحد من الآخر فإن المنطق هو الذى لابد أن يشتق من الرياضيات لا العكس .

فى عام ١٩٠٦ (وعمره ٥٢ سنة) حصل بوانكريه على أعلى مركز علمي في فرنسا : رئاسة الأكاديمية . وهذا المنصب لم يضخم غروره بل على العكس ظل بوانكريه شديد التواضع .

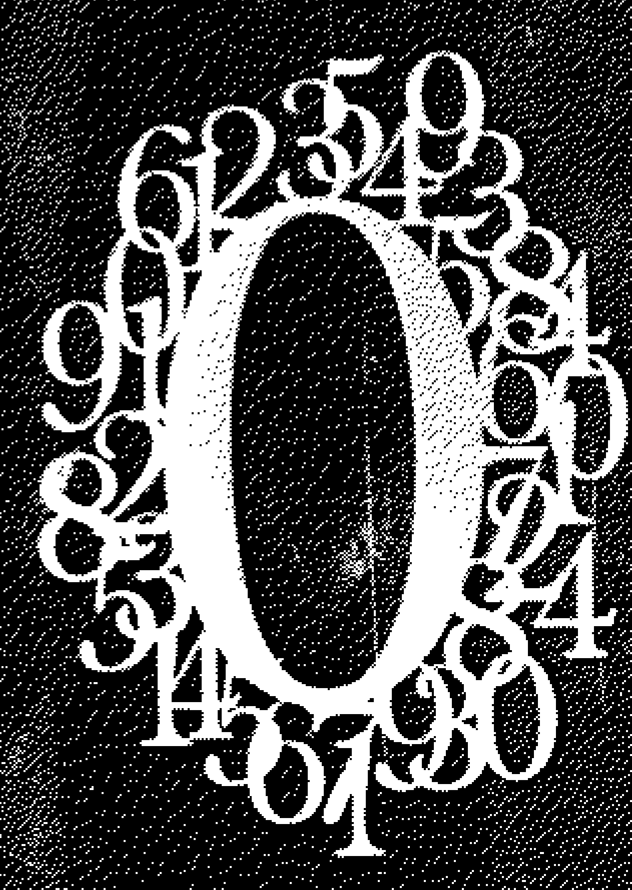
وكان بوانكريه سعيدا فى زواجه ، أنجب ولدا وثلاث بنات ، وكان من عشاق الموسيقى السيمفونية .

وفى المؤتمر الرياضى الدولى المنعقد عام ١٩٠٨ فى روما منعه المرض من قراءة بحثه عن " مستقبل الفيزياء الرياضية " ، وقد أجريت له عملية جراحية وظن أنه شفي تماما . لكن فى ربيع ١٩١٢ أجريت له عملية أخرى ، لكنه مات فجأة ، وكان فى التاسعة والخمسين وفى أوج قدراته العلمية .

ملحوظة أخيرة :

مسألة ن = ٣ عندما تصاغ رياضيا تنتهى فى التحليل الأخير إلى مسألة حل تسع معادلات تفاضلية آنية (كلها خطية من الدرجة الثانية). وكما هو الحال فى معظم المسائل الفيزيائية فإنه لايتوقع أن يكون الحل على هيئة حدود محدودة . وإذا كان هناك حل فعلا لهذه المسألة فلابد أن يكون على هيئة سلسلة لانهائية .

المحتويات	صفحة



تتعاظم في العصر الحديث أهمية علم الرياضيات الذي أصبح يدخل حياتنا من أوسع الأبواب .

وهذا الكتاب كما يقول مؤلفه العالم البارز في مادة الرياضيات والذي يتمتع بثقافات واسعة في مجالات شتى ، جعلته من أبرز شخصيات العصر ، يقول في مقدمة هذا الكتاب « مقدمة في تاريخ الرياضيات » :

(كثيرا ما تقدم الرياضيات كعلم نشأ في برج عاجي لا صلة له بالحياة العملية وبالنشاط الانتاجي للانسان ، على أن هذه النظرة للرياضيات زائفة ولا يدعمها تاريخ الرياضيات . ومن المؤكد أن دراسة تاريخ العلوم والحضارة يوضح أن ازدهار الحضارات ارتبط به ازدهار العلوم الرياضية ... إلخ) .

الناشر



دار المستقبل العربي